Problem No. 1（微分積分）

以下の問に答えよ．e は自然対数の底である．
<u>問 1 と問 3，問 4 については，導出の過程を省略し，答えのみを示せ．</u>
<u>問 2 と問 5 については，答えに加えて導出の過程も示せ．</u>

(問 1)

(1) $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$ の 4 次の導関数を求めよ．

(2) $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$ を $x = 0$ のまわりで 4 次の項までテイラー展開せよ．

(3) 以下の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x \cos x - 1}{\tan x}$$

(問 2) $f(x) = x - \sin x$ とする．実数 $x \geq 0$ に対して，

$$f(x) \geq 0$$

であることを証明せよ．

(問 3) $f(t)$ を以下の微分方程式を満たす実関数とする．

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \sin t = 0$$

この微分方程式の一般解を求めよ．また，初期値 $f(0) = 2$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ に対する特解を求めよ．

(問 4) 実関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$$

で定義する．ここで $\exp(t) = \mathrm{e}^t$ である．以下の問に答えよ．

(1) $x = r \cos\theta$ および $y = r \sin\theta$ $(r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ で定義される変数変換に対するヤコビ行列とその行列式を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ を求めよ．

(問 5) 数列 T_N^+，T_N^- を

$$T_N^+ = \sum_{j=1}^{N} \frac{j}{N^2} \log_\mathrm{e}\left(1 + \frac{j}{N}\right)$$

$$T_N^- = \sum_{j=1}^{N} \frac{j-1}{N^2} \log_\mathrm{e}\left(1 + \frac{j-1}{N}\right)$$

で定義する．ただし，N は自然数である．以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{N \to \infty} (T_N^+ - T_N^-) = 0$ であることを証明せよ．

(2) 任意の自然数 N に対して

$$T_N^- < \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x < T_N^+$$

となる実関数 $f(x)$ を考えることで，$\displaystyle\lim_{N \to \infty} T_N^+$ を求めよ．導出の過程も示すこと．

Problem No. 1 (Calculus)

Answer the following questions. e is the base of the natural logarithm. Omit the derivations and write only the answers for Q.1, Q.3 and Q.4. Show the derivations in addition to the answers for Q.2 and Q.5.

(Q.1)

(1) Obtain the fourth derivative of $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$.

(2) Obtain the fourth order Taylor series expansion of $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$ around $x = 0$.

(3) Obtain the value of the following limit:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x \cos x - 1}{\tan x}.$$

(Q.2) Let $f(x) = x - \sin x$. Prove that

$$f(x) \geq 0$$

for any real number $x \geq 0$.

(Q.3) Let $f(t)$ be a real function satisfying the differential equation

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \sin t = 0.$$

Obtain the general solution to this differential equation. In addition, obtain the particular solution for the initial values $f(0) = 2$ and $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

(Q.4) Define the real function $f(x, y)$ as

$$f(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right).$$

Here, $\exp(t) = \mathrm{e}^t$. Answer the following questions.

(1) Obtain the Jacobian matrix and its determinant for the coordinate transformation defined by $x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta$ $(r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$.

(2) Obtain the value of the definite integral $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(Q.5) Define the sequences T_N^+ and T_N^- as

$$T_N^+ = \sum_{j=1}^{N} \frac{j}{N^2} \log_{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{j}{N}\right),$$

$$T_N^- = \sum_{j=1}^{N} \frac{j-1}{N^2} \log_{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{j-1}{N}\right),$$

where N is a natural number. Answer the following questions.

(1) Prove that $\lim_{N \to \infty} (T_N^+ - T_N^-) = 0$.

(2) By considering a real function $f(x)$ satisfying

$$T_N^- < \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x < T_N^+$$

for any natural number N, obtain $\lim_{N \to \infty} T_N^+$. Show the derivation in addition to the answer.

Problem No. 2.1（線形代数）

以下の問に答えよ．問 3(4) 以外は，導出の過程を省略し，答えのみ示せ．

(問 1) 実数 a に対して，$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ を考える．

(1) 行列式 $\det(A)$ を a を用いて表せ．

(2) $\mathrm{rank}(A) = 2$ となる a を求めよ．

(問 2) 実数 b に対して，$B = \begin{pmatrix} 3 & b & 1 \\ b & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ を考える．

(1) 行列 B が正定値行列（すなわち，すべての固有値が正の実数）となるための b の条件を示せ．

以下，$b = 0$ とする．

(2) 行列 B の固有値とそれに対応する固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) $\boldsymbol{q}^\top = \begin{pmatrix} -6, & 6, & 0 \end{pmatrix}$ とする．$\top$ は転置を表す．$\boldsymbol{x}^\top B \boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^\top \boldsymbol{x}$ の最小値と，その最小値を与える実数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(問 3) 以下に示す 4×4 の巡回行列 C と，ベクトル $\boldsymbol{p}_m$ を考える．

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^m \\ \omega^{2m} \\ \omega^{3m} \end{pmatrix}, \quad \omega = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{4}}$$

ここで，m は整数，e は自然対数の底，i は虚数単位を表す．

(1) ω^{4m} を求めよ．

(2) 複素数 λ に対して $C\boldsymbol{p}_m = \lambda \boldsymbol{p}_m$ とする．λ を ω, m を用いて表せ．

(3) 行列 C のすべての固有値とそれぞれに対応する固有ベクトルを，$1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$ のみを用いて表せ．

(4) 5×5 の巡回行列

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のすべての固有値は $\alpha \cos \beta$ の形で表せる．α, β を求めよ．答えに加えて導出の過程も示せ．

Problem No. 2.1 (Linear algebra)

Answer the following questions. Omit the derivations and write only the answers except for Q.3(4).

(Q.1) For a real number a, consider the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

(1) Obtain the determinant $\det(A)$ in terms of a.

(2) Obtain a such that $\operatorname{rank}(A) = 2$.

(Q.2) For a real number b, consider the matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & b & 1 \\ b & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) Obtain the conditions on b for the matrix B to be positive definite (i.e., all eigenvalues are positive real numbers).

Hereafter, let $b = 0$.

(2) Obtain all the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of the matrix B.

(3) Let $\boldsymbol{q}^\top = \begin{pmatrix} -6, & 6, & 0 \end{pmatrix}$. Here $\top$ denotes the transpose. Obtain the minimum value of $\boldsymbol{x}^\top B \boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^\top \boldsymbol{x}$, and the real-valued vector $\boldsymbol{x}$ that minimizes it.

(Q.3) Let the 4×4 circulant matrix C and the vector $\boldsymbol{p}_m$ be given by:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^m \\ \omega^{2m} \\ \omega^{3m} \end{pmatrix}, \quad \omega = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{4}}.$$

Here, m is an integer, e is the base of the natural logarithm, and i denotes the imaginary unit.

(1) Obtain ω^{4m}.

(2) Let $C\boldsymbol{p}_m = \lambda \boldsymbol{p}_m$ for a complex number λ. Obtain λ in terms of ω and m.

(3) Obtain all the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of the matrix C, expressing them using only $1, -1, \mathrm{i}$, and $-\mathrm{i}$.

(4) All the eigenvalues of the 5×5 circulant matrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

are given in the form $\alpha \cos \beta$. Obtain α and β. Show the derivations in addition to the answers.

Problem No. 2.2（確率・統計）

以下の問に答えよ．e は自然対数の底である．

(問 1) 1 から n までの数値がそれぞれ 1 つずつ書かれた n 枚のカードをよく切って，裏向きに並べる．プレーヤー A と B が交互に 1 枚ずつ無作為にカードをめくっていき，A が先攻とする．数値 1 のカードが出た時点でゲームを終了し，数値 1 のカードをめくったプレーヤーを勝者とする．めくったカードは裏向きに戻さない．
(1), (3) については，導出の過程を省略し，答えのみを示すこと．
(2) については，答えに加えて導出の過程も示せ．

(1) $n = 3, 4, 5$ のそれぞれの場合について，プレーヤー A が勝利する確率を求めよ．

(2) プレーヤー A が勝利する確率を n を用いて表せ．

(3) 勝利した場合のカードの数値の合計を得点とする．$n = 4$ の場合について，プレーヤー A の得点の期待値と分散を求めよ．例えば，A が 2，B が 3，A が 1 の順にカードを引いた場合，A の得点は $2 + 1 = 3$ となる．

(問 2) あるコールセンターにおいて，測定時間 t の間に着信した電話の件数を $A(t)$ とする．このとき，$A(t)$ は以下の期待値 λt のポアソン分布に従う（$\lambda > 0$ は実定数）．

$$\Pr[A(t) = n] = \frac{(\lambda t)^n \mathrm{e}^{-\lambda t}}{n!}, \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

測定の開始から 1 回目および 2 回目の電話がかかってくるまでの時間を，それぞれ T_1, T_2 とする．
(1), (2), (4) については，導出の過程を省略し，答えのみを示すこと．
(3), (5) については，答えに加えて導出の過程も示せ．

(1) $\Pr[A(t) = 0]$ を λ と t を用いて表せ．

(2) $\Pr[T_1 > t]$ を λ と t を用いて表せ．

(3) T_1 の確率密度関数 $f_1(t)$ を導出せよ．

(4) T_1 の期待値を求めよ．

(5) T_2 の確率密度関数 $f_2(t)$ を導出せよ．

Problem No. 2.2 (Probability and Statistics)

Answer the following questions. e is the base of the natural logarithm.

(Q.1) Shuffle n cards, each labeled with a number from 1 to n, and place them face down in a row. Players A and B take turns flipping over one card at random, with A going first. The game ends when a card with the number 1 is flipped, and the player who flips the card with the number 1 is the winner. Once a card is flipped, it is not turned face down again. Regarding questions (1) and (3), omit the derivations and write only the answers. Regarding question (2), show the derivation in addition to the answer.

(1) Obtain the probability that Player A wins for each case of $n = 3, 4, 5$.

(2) Express the probability that Player A wins in terms of n.

(3) The sum of the numbers on the cards obtained by the winner is considered the score. Obtain the expectation and variance of Player A's score for the case of $n = 4$. For example, if the cards are flipped in the order of A drawing 2, B drawing 3, and A drawing 1, then Player A's score is $2 + 1 = 3$.

(Q.2) Let $A(t)$ denote the number of calls received at a call center during the measurement period t. In this case, $A(t)$ obeys the following Poisson distribution with expectation λt ($\lambda > 0$ is a real constant):

$$\Pr[A(t) = n] = \frac{(\lambda t)^n \mathrm{e}^{-\lambda t}}{n!}, \quad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Let T_1 and T_2 denote the times from the start of measurement to the first and second phone calls, respectively. Regarding questions (1), (2), and (4), omit the derivations and write only the answers. Regarding questions (3) and (5), show the derivations in addition to the answers.

(1) Express $\Pr[A(t) = 0]$ in terms of λ and t.

(2) Express $\Pr[T_1 > t]$ in terms of λ and t.

(3) Derive the probability density function $f_1(t)$ for T_1.

(4) Obtain the expectation of T_1.

(5) Derive the probability density function $f_2(t)$ for T_2.

Problem No. 2.3（力学）

以下の問に答えよ．答えのみ示せ．問1以外では重力加速度を定数 $g\,(>0)$ とする．

(問1) 速度 72 km/h で走っている車が急ブレーキをかけた．車が止まるまでに滑る時間と距離を答えよ．重力加速度を 10 $\mathrm{m/s^2}$, 動摩擦係数を 0.4 とする．車が急ブレーキをかけた瞬間に車輪の回転が止まるとする．

(問2) 図1のように，質量 m，半径 r の密度一様な剛体球を，傾斜角 $\theta\,(0^\circ < \theta < 90^\circ)$, 静止摩擦係数 μ の斜面の上に静かに置く．球が滑らずに転がるための μ の条件と，そのときの加速度を示せ．球の慣性モーメントは $mr^2/2$ とする．

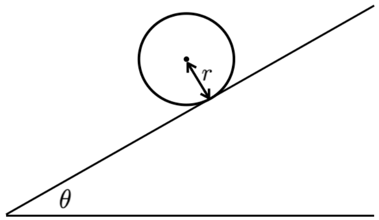

図1

(問3) 図2のように, 地球の表面の2点を結ぶ直線状のトンネルがあり, トンネルの一端から他端へ静止状態から動き始めた質量 m の質点の運動を考える．地球を半径 R, 密度 ρ の球とする．質点は地球の重力のみの影響を受けるものとし, 摩擦や自転は考慮しない．ここでは g は地球中心から距離 R の地表における重力加速度に相当する．また, 万有引力定数を G とする．

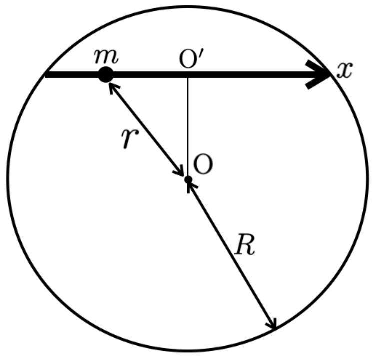

図2

(1) 地球の中心Oから質点までの距離を r とするとき，質点に作用する地球中心に向かう力 F を G，m，ρ，r を用いて表せ．

(2) トンネルに沿って x 軸をとり, 地球の中心Oからトンネルまでの距離が最短となる地点を原点 O′ とする．質点に作用する x 方向の力を F, x, r を用いて表せ．また, 質点の運動方程式を g，m，R，x を用いて表せ．

(3) 質点がトンネルの一端から他端まで移動するのにかかる時間を g，R を用いて表せ．

(問 4) 図 3 のように, 摩擦の無い水平な床の上に, 質量 m の球 A, 球 B, 質量 $2m$ の球 C がある. A は一定速度 $V\,(>0)$ で運動していて, 静止している B に衝突する. C は静止していて, ばね定数 $k\,(>0)$ の質量のないばねにつながっている. ばねの他端は固定されている. 球の大きさは無視し, 衝突に際して, 運動エネルギーは保存されるものとする. また, A が最初に運動していた方向を正とし, 球は共通の直線上を運動するものとする.

(1) A が B と最初に衝突した直後の A と B の速度を示せ.

(2) B と C が最初に衝突した後の運動を考える. A, B, C 間のさらなる衝突は考えない. 衝突した直後の B と C の速度を示せ. また, B と C の最初の衝突からの経過時間 t における C の位置を示せ. C の初期位置を原点とする.

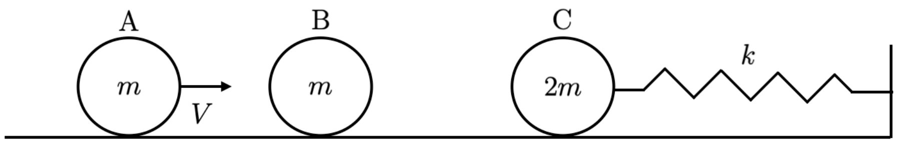

図 3

Problem No. 2.3 (Mechanics)

Answer the following questions. Write only the answers. Let the gravitational acceleration be constant $g\,(>0)$ except for Question 1.

(Q.1) A car moving at 72 km/h brakes suddenly. Answer how long it takes for the car to stop, and how far the car slides. Let the gravitational acceleration be 10 m/s^2, and the coefficient of kinetic friction be 0.4. The rotation of the wheels stops immediately when the car brakes.

(Q.2) As shown in Figure 1, a uniform-density rigid sphere of mass m and radius r is placed gently on a slope whose slope angle is $\theta\,(0^\circ < \theta < 90^\circ)$ and static friction coefficient is μ. Answer the condition of μ for the sphere to roll without slipping, and answer the acceleration of the sphere in such a case. The moment of inertia of the sphere is $mr^2/2$.

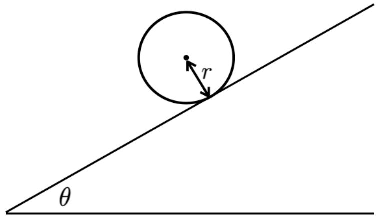

Figure 1

(Q.3) As shown in Figure 2, a straight tunnel connects two points on the surface of Earth. Consider a point mass of mass m that starts moving from a state of rest, from one end of the tunnel to the other. Suppose Earth is a sphere of radius R and density ρ. The point mass is only affected by Earth's gravity. Ignore friction and Earth's rotation. Here, g is the gravitational acceleration at the Earth's surface at a distance of R from the Earth's center. Let the constant of gravitation be G.

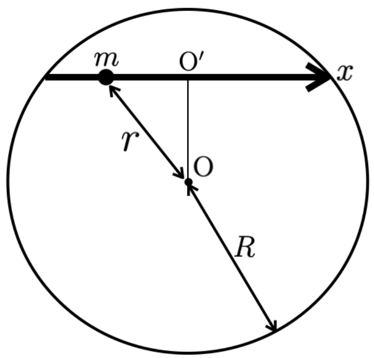

Figure 2

(1) The distance between the Earth's center O and point mass is r. Answer the force F toward the Earth's center acting on the point mass using G, m, ρ and r.

(2) x axis is taken along the tunnel with the origin Point O′ where the distance between the Earth's center O and the tunnel is

minimum. Answer the force acting on the point mass in the x direction using F, x and r. In addition, write the equation of motion for the point mass using g, m, R and x.

(3) Answer how long it takes for the point mass to move from one end of the tunnel to the other, using g and R.

(Q.4) As shown in Figure 3, Spheres A and B of mass m and Sphere C of mass $2m$ are on a frictionless horizontal floor. A moves with a constant velocity $V\,(>0)$ and collides with B at rest. C is at rest and connected with a massless spring of spring constant $k\,(>0)$. The other end of the massless spring is fixed. Ignore the size of the spheres. At collisions, kinetic energy is assumed to be conserved. Positive direction is taken in the direction of the initial motion of A. The spheres move along a common line.

(1) Answer the velocities of A and B right after their first collision.

(2) The movements of B and C after their first collision are considered. Further collisions among A, B and C are not considered. Answer the velocities of B and C right after their collision. In addition, answer the position of C at elapsed time t after their first collision. The origin is taken as the initial position of C.

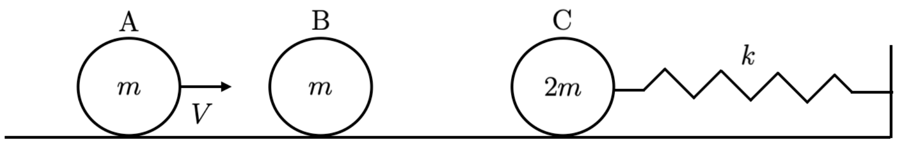

Figure 3

Problem No. 2.4（電磁気学）

以下の問に答えよ．ただし，真空中の誘電率，透磁率をそれぞれ ε_0，μ_0 とし，答えのみ示せ．

(問 1) 電気回路に関する以下の問に答えよ．

(1) 図 1 のような回路がある．3 つの抵抗の抵抗値はすべて r であるとする．AB 間の合成抵抗値を求めよ．

(2) 図 2 のような回路がある．3 つの抵抗の抵抗値はすべて r であるとする．EF 間の合成抵抗値を求めよ．

(3) 図 3 のように電圧 E の直流電圧源，スイッチ，抵抗値 r の抵抗，インダクタンス L のコイルで構成される回路を考える．初期状態では，スイッチは点線で示したように B につながっているとする．時刻 $t=0$ でスイッチを破線で示したように A につなげるとする．時刻 $t\,(>\ 0)$ での電流 I の方程式をかけ．また，その解を求めよ．

(4) (3) でスイッチを A につなげてから十分に長い時間が経った後に，時刻 $t=t_1$ でスイッチを B につなげるとする．時刻 $t\,(>\ t_1)$ での電流 I を求めよ．

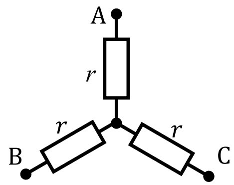

図1

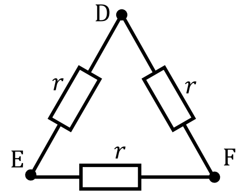

図2

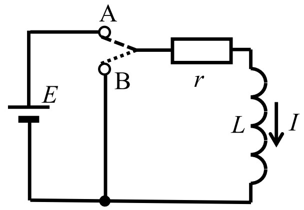

図3

(問 2) 真空中に置かれた半径 a，単位長さあたりの巻き数 n の無限に長い直線状のソレノイドを考える．

(1) ソレノイドに電流 I を流したときにソレノイド内部に発生する磁場 B とソレノイドに沿う単位長さあたりの磁場のエネルギーを求めよ．ただし，単位体積あたりの磁場のエネルギーは $B^2/(2\mu_0)$ である．

(2) このソレノイドの単位長さあたりのインダクタンスを求めよ．

(問 3) 直交座標系 (x, y, z) において一様な磁場 $(B, 0, 0)$ と一様な電場 $(0, E, 0)$ がかかっているとする．質量 m，電荷 q の荷電粒子が一定速度 $(0, 0, v)$ で運動しているとする．v の満たすべき条件を求めよ．

(問 4) 真空中に置かれた外半径 a の球 A と内半径 $b\,(>a)$ の球殻 B を考える（図 4）．ただし，A，B の中心は一致しているとする．電荷 Q が球 A の表面に一様に分布し，電荷 $-Q$ が球殻 B の内表面に一様に分布しているとする．

(1) 球の中心から距離 $r\,(a<r<b)$ の位置での電場の大きさ E を求めよ．

(2) A，B 間の空間に蓄えられた電場のエネルギーを求めよ．ただし，単位体積あたりの電場のエネルギーは $\varepsilon_0 E^2/2$ である．

(3) A，B 間の電位差を求めよ．

(問 5) 図 5 に示す半径 a，長さ $d\,(d \gg a)$ の円柱導体を考える．この導体の抵抗率は η であるとする．この円柱導体の両端に定電圧 V を印可したときに，電流密度一様の定電流 I が円柱導体に流れたとする．

(1) 円柱導体の両端間の抵抗 R を求めよ．

(2) I を V，R を用いて表せ．

(3) 単位時間に円柱導体に発生する熱エネルギーを I，V を用いて表せ．

(4) 図 5 に示すように円柱側面に電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{B}$ が発生しているとする．電場の大きさ E と磁場の大きさ B を求めよ．

(5) 円柱側面でのポインティングベクトルの大きさ $|(\vec{E}\times\vec{B})/\mu_0|$ を a，d，I，V を用いて表せ．

(6) (5) で求めた量を円柱側面で積分せよ．

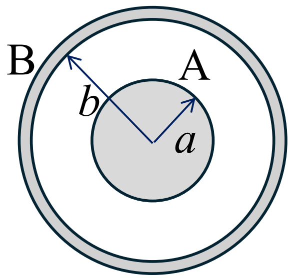

図4

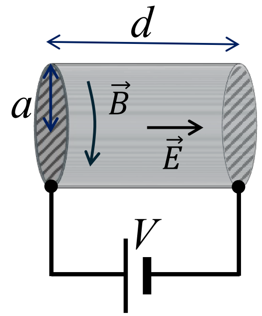

図5

Problem No. 2.4 (Electromagnetism)

Answer the following questions. Use the vacuum permittivity ε_0, the vacuum permeability μ_0 as necessary, and write only the answers.

(Q.1) Answer the following questions on electrical circuits.

(1) Figure 1 shows a circuit, where the resistance of each resistor is r. Write the equivalent resistance value between A and B.

(2) Figure 2 shows a circuit, where the resistance of each resistor is r. Write the equivalent resistance value between E and F.

(3) Figure 3 shows a circuit, which consists of a DC (direct current) voltage source with voltage E, a switch, a resistor with resistance r, and a coil with an inductance L. Initially, the switch is connected to B as shown by the dotted line. At time $t = 0$, the switch is connected to A as shown by the dashed line. Write the equation of current I at $t\,(> 0)$. In addition, write the solution.

(4) After a sufficiently long time has passed since the switch is connected to A in (3), at time $t = t_1$, the switch is connected to B. Write the current I at $t\,(> t_1)$.

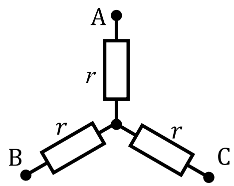

Figure 1

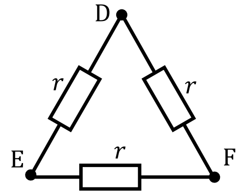

Figure 2

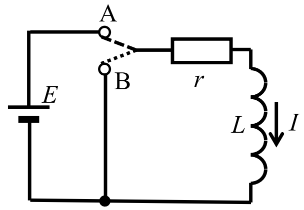

Figure 3

(Q.2) An infinitely long straight solenoid with radius of a and turn number per unit length of n is located in vacuum.

(1) When the current through the solenoid is I, write the magnetic field strength B inside the solenoid, and write the magnetic energy per unit length along the solenoid. Note that the magnetic energy per unit volume is $B^2/(2\mu_0)$.

(2) Write the inductance of the solenoid per unit length.

(Q.3) Consider a uniform magnetic field $(B, 0, 0)$ and a uniform electric field $(0, E, 0)$ in Cartesian coordinates (x, y, z). A charged particle with mass m and charge q is traveling with a constant velocity $(0, 0, v)$. Write the condition v should satisfy.

(Q.4) Consider co-centered sphere A with outer radius a and spherical shell B with inner radius $b\,(> a)$ in vacuum (Figure 4). Charge Q is uniformly distributed on the surface of A, while charge $-Q$ is uniformly distributed on the inner surface of B.

(1) Write the electric field strength E at distance r from the sphere's center $(a < r < b)$.

(2) Write the electric energy stored in the space between A and B. Note that electric energy per unit volume is $\varepsilon_0 E^2/2$.

(3) Write the electric potential difference between A and B.

(Q.5) Figure 5 shows a straight cylindrical conductor with radius a and length $d\,(d \gg a)$. The resistivity of the conductor is η. When a constant voltage V is applied between both ends of the conductor, a current I flows through the conductor. Assume that I is constant and the current density is uniform.

(1) Write the resistance R between both ends of the cylindrical conductor.

(2) Express I using V and R.

(3) Express the thermal energy generated in the cylindrical conductor per unit time using I and V.

(4) Electric field $\vec{E}$ and magnetic field $\vec{B}$ appear on the cylindrical surface as shown in Figure 5. Write the absolute values of the electric and magnetic fields.

(5) Write the absolute value of Poynting vector $|(\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0|$ on the cylindrical surface using a, d, I and V.

(6) Integrate the quantity obtained in (5) on the cylindrical surface.

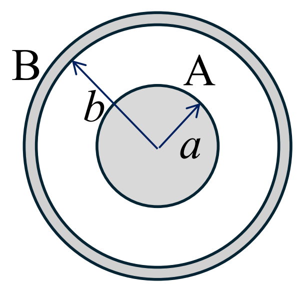

Figure 4

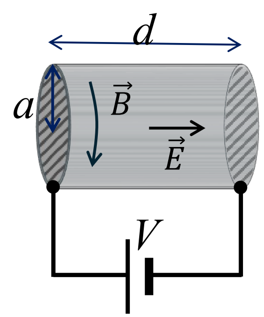

Figure 5