Slot 1: 1.1 微分積分（40 分）

以下の問に答えよ．すべての定数と変数は実数，関数は実関数とする．導出の過程を省略し，答えのみ示せ．

(問 1) 関数 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ が以下の微分方程式を満たしている．

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = -k_1 A(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t} = k_1 A(t) - k_2 B(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} = k_2 B(t)$$

初期条件は $A(0)=A_0$, $B(0)=0$, $C(0)=0$ である．ただし A_0, k_1, k_2 は正の定数である．

(1) $A(t)$ を求めよ．

(2) $k_1 \neq k_2$ のとき $B(t)$ と $C(t)$ を求めよ．

(3) $k_1 = k_2$ のとき $B(t)$ と $C(t)$ を求めよ．

(問 2) xyz 直交座標系において成分 (a, b, c) を持つ単位ベクトルを法線ベクトルとし，原点を通る平面 P を考える．

(1) 平面 P の表式を示せ．

(2) 3 点の座標 $\mathrm{Q}_1(\sqrt{2}, 0, 0)$，$\mathrm{Q}_2(0, 1, -1)$，$\mathrm{Q}_3(1, 1, 1)$ を定義する．Q_i $(i = 1, 2, 3)$ から平面 P への距離を h_i とするとき，$L = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$ とする．L の表式を示せ．

(3) L を最小とする平面 P の式と L の値を求めよ．

(問 3) xy 直交座標系で三つの曲線 $y=\dfrac{1}{x^2+1}$, $y=\dfrac{1}{2}x^2$, 及び $x = 0$ で囲まれる $x \geq 0$ の領域 W を y 軸の回りで 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(問 4) xyz 直交座標系において点 $(x, y, z)=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \theta)$ の $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の区間の軌跡の長さを求めよ．

Slot 2: 2.1 線形代数（40 分）

(問 1) 行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1-a & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする．ここで a は実定数である．また, $\boldsymbol{x}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を 3 次元の実ベクトルとする．このとき以下の問に答えよ．
導出の過程を省略し，答えのみを示せ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A のランク r が $r < 3$ であるとする．a を求めよ.

(3) $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ の集合を求めよ.

(4) 写像 $\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を考える．任意の $\boldsymbol{x}_0$ に対して

$$\boldsymbol{x}^* = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n$$

が存在するための a の条件を求めよ.

(5) a が (4) で求めた条件を満たすとする．このとき，$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$ に対する $\boldsymbol{x}^*$ を求めよ.

(問 2) 次の 3 つのベクトルを考える：

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

(1) これらのベクトルが 1 次独立であるかを判定せよ.

(2) これらのベクトルの 1 次結合で表される点 (x, y, z) の集合が従う方程式を $z = lx + my$ とする．l と m を求めよ．導出の過程を省略し，答えのみを示せ.

(問 3) xy 直交座標系上の 3 直線 $a_i x + b_i y + c_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ が 1 点で交わる，あるいは，平行であるための必要十分条件は

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0$$

である．ここで f_i $(i = 1, 2, 3)$ はある関数

$$f_i = f_i(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$$

である．この命題に対して次の問に答えよ.

(1) 3 直線が 1 点で交わるという条件から関数 f_i $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ．導出の過程を省略し，答えのみを示せ.

(2) この命題を証明せよ.

Slot 2: 2.2 力学（40 分）

図 1 のように長さ l_1 の棒 1 と質量 m_1 の質点 1 から成る振り子の先に，長さ l_2 の棒 2 と質量 m_2 の質点 2 から成る振り子がつながった系を考える．棒に質量はないものとする．重力加速度は鉛直下向きに g (>0) であるとし，棒 1，棒 2 が鉛直下向きからなす角をそれぞれ θ_1, θ_2 とする．θ_1, θ_2 の 0 からの変位は十分小さいとして，θ_1, θ_2 の累乗の最低次の近似で答えよ．

(問 1) まず，$\theta_1 = 0$ で変化しない場合を考える．

(1) θ_2 についての 1 次の運動方程式を書け．

(2) (1) の運動方程式の正の固有角周波数を求めよ．

(3) 質点 2 と共に運動する系における，棒 2 に沿った方向の慣性力の θ_2 についての次数を書け．

(4) 質点 2 が棒 2 から受ける張力の大きさ F を求めよ．

(問 2) 次に質点 1 の運動も含めて考える．

(1) 質点 1 についての θ_1 方向の運動方程式を，棒 2 にかかる張力 F を用いて書け．

(2) 実験室系における，質点 1 の棒 1 に沿った方向の加速度の θ_1 についての次数を書け．

(3) 質点 2 についての運動方程式には，(問 1)(1) の力に加えて，力 $(\simeq -m_2 l_1 \mathrm{d}^2\theta_1/\mathrm{d}t^2)$ が働く．この力が現れる理由を簡潔に説明せよ．

(4) (θ_1, θ_2) の 1 次の連立運動方程式を

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\kappa_{11} & \kappa_{12}\\ \kappa_{21} & \kappa_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}$$

の形で書け．θ_1, θ_2 について最低次では，棒 2 にかかる張力 F は (問 1)(4) と同じであるとせよ．

(5) $l_1 = 2a/3$，$l_2 = a/2$，$m_1 = m_2$ のとき，この系の 2 つの正の固有角周波数と，それぞれに対する固有ベクトル (θ_1, θ_2) を求めよ．固有ベクトルを規格化する必要はない．

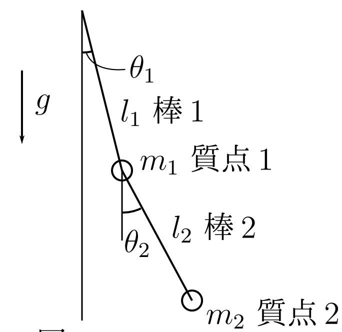

図 1

Slot 3: 3.1 解析学 (40 分)

x, t, θ は実数，z は複素数とする．以下の問に答えよ．

(問 1) $m, n \geq 1$ を整数，L を実数とする．

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x$$

を計算せよ．導出の過程を省略し，答えのみ示せ.

(問 2) 関数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ を考える．

$a_n = \displaystyle\int_0^L f(x) g_n(x)\mathrm{d}x$ の形で a_n を表現したとき，$g_n(x)$ を求めよ．導出の過程を省略し，答えのみ示せ.

(問 3) $0 \leq x \leq 1$ とする．2 変数関数 $u(x,t)$ についての偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を，初期条件 $u(x,0) = x - x^2$，$\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$，境界条件 $u(0,t) = u(1,t) = 0$ のもとで考える．この偏微分方程式の解を $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n X_n(x) T_n(t)$ としたとき，係数 b_n, 関数 $X_n(x), T_n(t)$ を求めよ．導出の過程を省略し，答えのみ示せ.

(問 4) k を整数とする．関数 $h(z,x) = \exp\left(\dfrac{x}{2}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)\right)$ のローラン展開 $h(z,x) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) z^k$ を考える．

(i) 以下の関係が成立することを留数定理を用いて示せ.

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - k\theta)\mathrm{d}\theta \qquad (1)$$

(ii) a を実定数とする．$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin(a\sin\theta)$ を求めよ．導出の過程を省略し，答えのみ示せ.

(iii) $x \neq 0$ とする．$J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x)$ と $J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x)$ を $J_k(x)$ と $\dfrac{\mathrm{d}J_k(x)}{\mathrm{d}x}$ を用いて表せ． (1) 式を利用しても良い．導出の過程を省略し，答えのみ示せ.

Slot 3: 3.2 確率・統計（40 分）

(問 1) X_1, X_2 を互いに独立で，共に区間 $[0,1]$ 上の連続一様分布に従う確率変数とする．以下の問に答えよ．
<u>導出の過程は省き，答えのみ記すこと.</u>

(1) X_1 の期待値 $E[X_1]$ と分散 $V[X_1]$ を求めよ．

(2) X を X_1, X_2 の最大値とする．確率 $\Pr\left(X \geq \frac{1}{3}\right)$ を求めよ．

(問 2) Y_1 を区間 $[0,1]$ 上の連続一様分布に従う確率変数とする．Y_2 を Y_1 を条件とした以下の条件付き確率密度関数に従う確率変数とする．

$$f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|y_2-y_1|} \quad (-\infty < y_2 < \infty)$$

ここで，$|y_2 - y_1|$ は $y_2 - y_1$ の絶対値を，e は自然対数の底を表す．以下の問に答えよ．<u>導出の過程は省き，答えのみ記すこと.</u>

(1) Y_2 の周辺確率密度関数 $f_{Y_2}(y_2)$ を求めよ．

(2) 確率 $\Pr(Y_2 \geq 0)$ を求めよ．

(問 3) $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$ を区間 $[0,\theta]$ 上の連続一様分布からの大きさ n の無作為標本とする．ここで，θ は正のパラメータである．$\hat{\theta} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$ を θ の推定量とする．以下の問に答えよ．
<u>答えに加えて導出の過程も記すこと.</u>

(1) $\hat{\theta}$ は θ の不偏推定量であることを示せ．

(2) $\hat{\theta}$ の分散 $V[\hat{\theta}]$ を求めよ．

(3) $n = 2$ のとき，$\hat{\theta}$ の確率密度関数を求めよ．

Slot 3: 3.3 電磁気学 (40 分)

以下の問に答えよ．全ての問題において真空環境下を前提とし，必要に応じて真空の透磁率 μ_0 を用いよ．

(問 1) 図 1 に示すように，磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ が，位置 $\boldsymbol{r}$ にある点 P に与える磁界 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ を以下の式で表せるとする．

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{r}|^3}\right\}$$

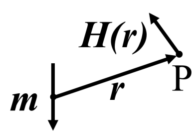

図 1

(1) 点 P における磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の関係を表せ．

(2) $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角が $\pi/2$ のとき，磁束密度の大きさを求めよ．

(3) $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角が π のとき，磁束密度の大きさを求めよ．

(4) 磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ が作る磁界を数本の磁力線を用いて図示せよ．このとき磁力線の向きを明示すること．

(問 2) 図 2 に示すように，線要素 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ を流れる電流 I が変位 $\boldsymbol{r}$ の位置に作る磁界を以下のビオ・サバールの式で表すとき，以下の問に答えよ．

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

(1) $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ が半径 a の円環の一部であるとき，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ を流れる電流 I が円環の中心軸上の高さ z の位置に作る磁界のうち，軸方向の成分を求めよ．

(2) 半径 a の円環電流 I が中心軸上の高さ z の位置に作る磁界を求めよ． また，$z = 0$ のときの磁界を求めよ．

(3) $z \gg a$ のとき，軸上の磁束密度の大きさを求めよ．また，この値が (問 1)(3) で求めた磁束密度の大きさと等しいとき，磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ の大きさを a と I で表せ．

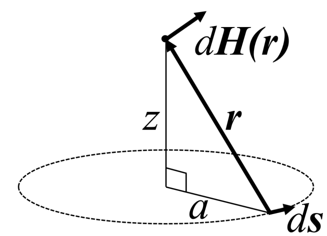

図 2

(問 3) 地球を南向きの磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ を中心にもつ半径 r の球と仮定する．ただし $|\boldsymbol{m}| = 7.8\times10^{22}\,\mathrm{Am}^2$，$r = 6400\,\mathrm{km}$ とする．赤道上に半径 1 m の円環電流があるとき，円環の中心において地球の磁界を打ち消し合うために必要な電流を有効数字 2 桁で求めよ．また，このときの地球と円環電流の位置関係を図示せよ．さらに円環電流に流れる電流の向きを矢印で示せ．