Slot 1: 1.1　微分積分（40 分）

以下の問に答えよ．全ての定数と変数は実数，関数は実関数とする．導出の過程を省略し，答えのみ示せ．

(問 1) 関数 $y(x)$ が満たす次の微分方程式を考える．

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = f(x)$$

(1) $f(x) = 0$ のときの解を求めよ．任意定数として $C_1, C_2$ を用いること．

(2) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ のときの解を求めよ．e は自然対数の底である．

(問 2) 関数 $y(x)$ が満たす次の微分方程式を考える．

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+y-1}{x+y+1}$$

(1) $x + y = u$ と変数変換するとき，$x$ と $u$ が満たす，$y$ を含まない微分方程式を求めよ．

(2) 微分方程式を解いて，$x = f(u)$ を満たす関数 $f(u)$ を求めよ．任意定数として $C$ を用いること．

(問 3) 次の不定積分を求め，空欄に入る式を書け．$a$ は 0 でない定数である．

$$\int \mathrm{e}^x \sin ax \ \mathrm{d}x = \boxed{\phantom{xxxx}} (\sin ax - a\cos ax)$$

(問 4) $xy$ 直交座標系上の以下の方程式によって表される楕円を考える．$a, b$ は 0 でない正の定数である．

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(1) この楕円の接線の方程式を求めよ．ただし接点の座標を変数 $\theta$ を用いて $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ とおく．

(2) この接線が $x$ 軸，$y$ 軸と交わる点をそれぞれ A, B とする．線分 AB の長さの最小値を求めよ．

(問 5) 問 4 の楕円で囲まれた領域 D における以下の重積分を考える．

$$\iint_{\mathrm{D}} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(1) 変数 $r, \theta$ を用いて以下の変数変換を行うときのヤコビアンを求めよ．

$$x = ar\cos\theta, \quad y = br\sin\theta$$

(2) 上の重積分を計算せよ．

Slot 2: 2.1 線形代数（40 分）

以下の問に答えよ．

(問 1) 実正方行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta \end{pmatrix}$$

とする．ただし $0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1$ とする．このとき，以下の問に答えよ．導出の過程を省略し，答えのみ示せ．

(1) 行列 $A$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 < \lambda_2$ とする．

(2) 行列 $A$ の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を求めよ．ただし，固有値 $\lambda_1, \lambda_2$ に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ とする．

(3) 正の整数 $n$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(問 2) $n \times n$ 実対称行列 $B$ の固有値を $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ $(\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n)$ とし，対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ の制約のもとでの $\dfrac{\boldsymbol{x}^\top B \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}}$ の最小値を求めよ．答えに加えて，導出の過程を示せ．

(2) $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{v}_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m,\ 1 \leq m < n)$ の制約のもとでの $\dfrac{\boldsymbol{x}^\top B \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}}$ の最小値を求めよ．導出の過程を省略し，答えのみ示せ．

ただし，$n, m$ は正の整数，$\boldsymbol{x}$ は $n$ 次元実ベクトル，$\top$ は転置とする．

(問 3) 実正方行列 $C$ を

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

とする．行列 $C$ の固有値を $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ $(\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3)$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 以下を $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ を用いて示せ．導出の過程を省略し，答えのみ示せ．

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 3} (c_{ii} c_{jj} - c_{ij} c_{ji})$$

(2) 以下が成立することを示せ．ただし $\mathrm{e}$ は自然対数の底，$k! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1$ は $k$ の階乗，$\det$ は行列式とする．導出の過程も示せ．

$$\det\left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} C^k \right) = \mathrm{e}^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}$$

Slot 2: 2.2 力学 (40 分)

直線上を運動する 4 つの質量 $m$ の質点を考える．図 1 に示すように，これらの質点は自然長 $l$，ばね定数 $k$，質量 0 のばねでつなげられているとする．左側の 2 つの質点とばねからなる系を物体 A，右側の 2 つの質点とばねからなる系を物体 B と呼ぶ．直線上の質点の座標をそれぞれ $x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，速度をそれぞれ $v_1$，$v_2$，$v_3$，$v_4$ とする．常に $x_1 < x_2$，$x_3 < x_4$ が成立し，2 つの質点が衝突する時の反発係数は 1（完全弾性衝突）とし，摩擦は無視できるものとする．以下の問に答えよ．ただし，解答用紙には解のみを記せ．

(問 1) 時刻 $t = 0$ で，$x_2 < x_3$，$x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = l$，$v_1 = V_{10}\,(> 0)$，$v_2 = v_3 = v_4 = 0$ とする．

(1) 物体 A のばねの伸び縮みを $\Delta x \equiv x_2 - x_1 - l$ とし，$\Delta x$ の運動方程式を示せ．また，その固有振動数を求めよ．

(2) 物体 A のエネルギーを 2 つの質点の重心の運動に伴うエネルギー $C_{\rm A}$，2 つの質点の相対運動に伴うエネルギー $R_{\rm A}$，ばねの蓄えるエネルギー $S_{\rm A}$ に分解したとする．$C_A + R_A$ は全運動エネルギーとなる．$C_A + R_A$ を $m, v_1, v_2$ を用いて表せ．

(3) $C_{\rm A}$，$R_{\rm A}$ を $m, v_1, v_2$ を用いて表せ．また，$S_{\rm A}$ を $x_1, x_2, l, k$ を用いて表せ．

(4) 時刻 $t = 0$ で $C_A$，$R_A$ を $m, V_{10}$ を用いて表せ．また，この時の $S_A$ の値を求めよ．

(問 2) (問 1) で示した初期条件での物体 A と物体 B との一度目の衝突を考える．このとき，$x_2 = x_3$ となり，物体 A の右側の質点と物体 B の左側の質点が衝突する．衝突直前のこれらの質点の速度を $V_2\,(> 0)$，$v_3 = 0$，衝突直後の速度を $V_2'$，$V_3'$ とする．

(1) $V_2'$，$V_3'$ を $V_2$ を用いて表せ．

(2) 物体 B について，物体 A と同様にエネルギー $C_{\rm B}$，$R_{\rm B}$，$S_{\rm B}$ を定義する．衝突直後の比 $C_{\rm B}/(R_{\rm B} + S_{\rm B})$ を求めよ．

(3) 衝突直前の $v_1$ を $V_{10}, V_2$ を用いて表せ．

(4) 衝突直前の $R_{\rm A}$ を $m, V_{10}$，$V_2$ を用いて表せ．

(5) 衝突直後の比 $C_{\rm A}/(R_{\rm A} + S_{\rm A})$ を $V_{10}$，$V_2$ を用いて表せ．

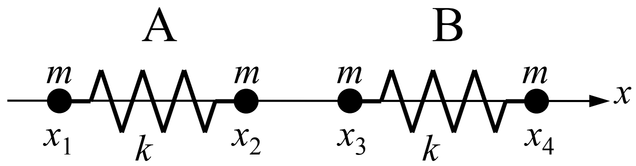


図 1

Slot 3: 3.1 解析学（40 分）

$t, \omega$ を実数とし，実関数 $f(t)$ のフーリエ変換と，その逆フーリエ変換をそれぞれ以下のように定義する.

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

ここで e は自然対数の底，i は虚数単位である. $a$ を正の実定数として，実関数 $g(t)$ を以下のように定義する.

$$g(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

以下の問に答えよ. <u>(問 1) と (問 2) は導出を省略し，答えのみ示せ. (問 3) と (問 4) は答えに加えて導出の過程も示せ.</u>

(問 1) $g(t)$ のフーリエ変換 $G(\omega)$ を求めよ.

(問 2) $s$ を実数とし，実関数 $h(t)$ を $h(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t+s)g(s)\mathrm{d}s$ と定義する. $h(t)$ のフーリエ変換 $H(\omega)$ を $G(\omega)$ とその複素共役 $\overline{G(\omega)}$ を用いて表せ.

(問 3) $z$ を複素数とする. 図 1 の積分経路 $C = C_1 + C_2$ に沿った周回積分

$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z \quad (t \geq 0) \tag{1}$$

を考える. $C_1$ は $-R$ と $R$ を結ぶ線分，$C_2$ は原点 O を中心とする半径 $R$ の上半円である. ただし，$R > a$ とする. $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ はそれぞれ $z$ の実部と虚部を表す.

(i) 式 (1) の被積分関数の $\mathrm{Im}\, z > 0$ における極とそこでの留数を求めよ.

(ii) 式 (1) に留数定理を適用し，積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega^2+a^2}\mathrm{d}\omega$$

を求めよ. $R \to \infty$ で，$C_2$ に沿った積分の寄与がなくなることを用いてよい.

(問 4) (問 2) で求めた $H(\omega)$ の逆フーリエ変換 $\mathcal{F}^{-1}[H(\omega)]$ を求め，$t$ の関数としてその概形を描け.

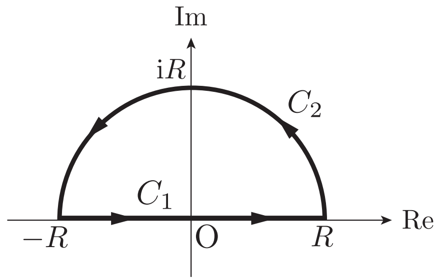


図 1: 積分経路

Slot 3: 3.2 確率・統計（40 分）

(問 1) 国民の 0.1 % が感染症に感染しているとする．ある検査は，検査を受けた感染者の 80 % を陽性と判定する．しかし，この検査は，検査を受けた非感染者の 0.2 % を陽性と誤って判定してしまう．国民から無作為に抽出された 1 名がこの検査で陽性と判定されたとき，感染している確率はいくらか．以下の選択肢のうちで最も近いものを 1 つ選べ．計算過程は示さなくてよい.

(a) 0.2,　(b) 0.3,　(c) 0.4,　(d) 0.5,
(e) 0.6,　(f) 0.7,　(g) 0.8,　(h) 0.9.

(問 2) 確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立で，同一の確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

に従うとする．ただし，e は自然対数の底，$\lambda$ は正のパラメータである．このとき，以下の問に答えよ．(1)，(2)，(3) については，導出の過程を省略し，答えのみ示せ.(4) と (5) は，答えに加えて導出の過程も示せ.

(1) 確率変数 $X_1$ の期待値 $E[X_1]$ と分散 $V[X_1]$ を考える．$E[X_1] = a\lambda^b$ および $V[X_1] = c\lambda^d$ を満たす定数 $a$, $b$, $c$, $d$ を求めよ．

(2) 標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に基づく，パラメータ $\lambda$ についての最尤推定量を求めよ．

(3) 確率変数 $S_2 = X_1 + X_2$, $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$ を考える．$S_2$, $S_3$ の確率密度関数 $f_{S_2}(x)$, $f_{S_3}(x)$ を求めよ．

(4) $n$ 個の確率変数の和，すなわち，$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ を考える．$S_n$ の確率密度関数 $f_{S_n}(x)$ を導出せよ．
以下の公式を用いてもよい．

$$m! = \int_0^\infty t^m \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$$

ただし，$m$ は自然数，$t$ は実数，$m! = m \cdot (m-1) \cdots 2 \cdot 1$ は $m$ の階乗である．

(5) (2) で求めた最尤推定量が不偏推定量であること，あるいは，そうではないことを示せ．

Slot 3: 3.3 電磁気学 (40 分)

以下の問に答えよ．必要に応じて真空誘電率 $\varepsilon_0$，真空透磁率 $\mu_0$ を用いよ．また $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ はそれぞれ電場，磁場を表す．解答用紙には解のみを記せ．

(問 1) 以下の値を $\rho, l, S, d, n$ を用いて表せ．

(1) 抵抗率 $\rho$ の材質でできた円柱（断面積 $S$，長さ $l$）の電気抵抗 $R$.

(2) 微小距離 $d$ だけ離れた面積 $S$ の平行平板間の静電容量 $C$.

(3) 断面積 $S$，長さ $l$，単位長さあたりの巻き数 $n$ の十分長いソレノイドの自己インダクタンス $L$.

(問 2) 図 1 の回路の両端に交流電圧（角周波数 $\omega$）を印加したときの合成インピーダンスを $R, L, C$ を用いて表せ．

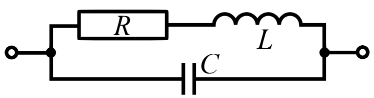


図 1

(問 3) 電荷密度 0，電流密度 0 の真空中におけるファラデーの法則とアンペールの法則を以下のように表す．

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \partial \boldsymbol{B}/\partial t = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0\mu_0 \partial \boldsymbol{E}/\partial t = 0$$

このとき $\boldsymbol{E}$ に関する波動方程式を書け．必要に応じてベクトル公式 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla^2 \boldsymbol{F}$ を用いてよい．

(問 4) $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ の波動方程式の解が以下のように表せるとき，$\omega$ と $\boldsymbol{k}$ の関係を求めよ．

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{e_1} E_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{e_2} B_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)$$

またこの波の位相速度 $v_p$ を求めよ．ただし $\boldsymbol{k}$ は実数の波数ベクトル，$\boldsymbol{x}$ は座標ベクトル，$\omega$ は周波数（実数）であり，$\boldsymbol{e_1}$，$\boldsymbol{e_2}$ は単位ベクトルである．なお，$\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{e_1}$，$\boldsymbol{e_2}$ は互いに垂直である．

(問 5) 前問で求めた位相速度 $v_p$ と $E_0$，$B_0$ の関係を求めよ．

(問 6) 単位体積あたりの電磁場のエネルギー $u$ が以下の式で表せるとき，1 周期で平均したエネルギーおよびポインティングベクトルを求めよ．

$$u = \varepsilon_0 |\boldsymbol{E}|^2/2 + |\boldsymbol{B}|^2/2\mu_0$$

(問 7) 太陽光の平均エネルギー流束が 1.4 kW/m$^2$ のとき，平均エネルギー密度と電場，磁場の振幅を有効数字一桁の精度で計算せよ．ただし，$\varepsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12}$ F/m，$\mu_0 = 1.3 \times 10^{-6}$ H/m とせよ．