東京大学大学院 新領域創成科学研究科 複雑理工学専攻
2021 年度 大学院修士課程入学試験 サンプル問題（1）
解答時間 30 分

以下の各問に答えよ.
ただし，以下に与えられるすべての定数，変数は実数，関数は実関数であるとする.

(問 1) 直交座標系を構成する xyz 空間上の曲面 $z = ax^2 + y^2 + 2xy - 2x$ を考える．ただし $a \neq 0$ とする.

(i) この曲面に対する $(x, y, z) = (1, 0, a - 2)$ における接平面を $z = rx + py + s$ とする．r, p, s を求めよ.

(ii) (i) で求めた接平面が x 軸と交点を持った．このときの a の条件を求めよ.

(iii) (ii) の条件を満たす接平面と，原点との距離が $\frac{1}{\sqrt{5}}$ であった．このときの a を求めよ.

(問 2) 以下の行列とベクトルを考える.

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_t = D + t\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^\top,\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

ただし，t は正の実数，$\top$ は転置を表す.

(i) A_t の全ての要素の和を t を用いて表せ.

(ii) b_{ij} を A_t^{-1} の第 (i, j) 成分とする．b_{11} および b_{33} を t を用いて表せ.

(iii) $\boldsymbol{x}$ を t によらない定ベクトルとする．$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}^\top A_t^{-1} \boldsymbol{x} = 0$ が成り立つ $\boldsymbol{x}$ の必要十分条件を求めよ.

(問 3) 関数 $f(y)$ を $f(y) = y - y^2$ とする.

(i) $\dfrac{1}{f(y)} = \dfrac{A}{y} + \dfrac{B}{1 - y}$ $(y \neq 0, 1)$ と部分分数分解したときの定数 A, B を求めよ.

(ii) 微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y)$ の一般解を求めよ．任意定数として C を用いること.

東京大学大学院 新領域創成科学研究科 複雑理工学専攻
2021 年度 大学院修士課程入学試験 サンプル問題（2）
解答時間 30 分

以下の各問に答えよ．
ただし，以下に与えられるすべての定数，変数は実数，関数は実関数であるとする．

(問 1) xy 平面上の直線 $\ell : y = ax + b$ を考える．ただし a と b は実数である．

(i) q を実数とする．点 $(0, q)$ と直線との距離が $2/\sqrt{a^2+1}$ であった．このときの q の値を求めよ．

(ii) p を実数とする．ℓ を 3 点 $(1, 0), (0, -1), (2, p)$ に対する最小二乗法による近似直線であるとする．
a, b を p を用いて表せ．

(iii) (ii) で求めた近似直線が p によらず通過する点を求めよ．

(問 2) 以下の逆行列 A^{-1} をもつ行列 A および直交座標空間上のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}$ を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

また，$\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = 1$ を満たす点 $\boldsymbol{x}$ 全体の集合を平面 S とする．ただし $\top$ は転置を表す．

(i) 線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ による S の像を $S' = \{\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in S\}$ とする．

平面 S' を方程式 $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x}' = 1$ で記述するとき，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^\top$ を求めよ．

(ii) 原点から S' への垂線の足の座標を求めよ．

(iii) $c > 0$ に対し，3 次元の楕円体として $\boldsymbol{x}^\top A^\top A \boldsymbol{x} = c$ を満たす点 $\boldsymbol{x}$ の集合 T を考える．
T が S に接するときの c の値を求めよ．

(問 3) 関数 $f(y)$ を $f(y) = 1 - \dfrac{1}{4}y^2$ とする．

(i) $\dfrac{1}{f(y)} = \dfrac{A}{1 + \frac{y}{2}} + \dfrac{B}{1 - \frac{y}{2}}$ $(y \neq \pm 2)$ と部分分数分解したときの定数 A, B を求めよ．

(ii) 微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y)$ の一般解を求めよ．任意定数として C を用いること．