東京大学大学院
新領域創成科学研究科
複雑理工学専攻

受 験 番 号					

問題冊子にも受験番号を書きなさい．

２０２０年度大学院入学試験問題

修士課程

専門基礎科目

2019 年 8 月 20 日（火）

13:30～16:00（150 分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけません．
2. 本冊子の総ページ数は 21 ページです．落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること．
3. 解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい．
4. 問題は，必修問題 1 問，選択問題として数学 3 問，物理学 4 問，合計 8 問出題されます．必修問題 1 問（第 1 問）と，選択問題（第 2～8 問）から 2 問を選択して，合計 3 問を解答しなさい．解答する選択問題 2 問は，1 科目の中から選択しても，複数科目から選択してもよい．
5. 解答用紙は計 3 枚配られます．各問題ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用しなさい．解答用紙に書ききれない場合は，裏面にわたってもよい．
6. 解答は日本語または英語で記入しなさい．
7. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入しなさい．問題冊子にも受験番号を記入しなさい．
8. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
9. 解答に関係ない記号，符号などを記入した答案は無効とする．
10. 解答用紙・問題冊子は持ち帰ってはいけません．

第 1 問（必修問題）

以下の問に答えよ．ただし，x, y, z, t, k は実数であるとする．

(問 1) 関数 $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．また，曲面 $z = f(x,y)$ の $(x,y,z) = (1,2,f(1,2))$ における接平面の方程式を求めよ．

(問 2) 関数 $h(x) = \exp\{\exp(2x) - 1\}$ を $x = 0$ のまわりで 1 次の項までテイラー展開せよ．また，極限

$$a = \lim_{x \to 0} \frac{1 - h(x)}{x^k}$$

が存在し，$0 < |a| < \infty$ を満たすとき，k と a の値を求めよ．

(問 3) 関数 $\cos^{-1}$ は $\cos$ の逆関数で，$\cos^{-1}$ の定義域と値域は，それぞれ，$[-1,1]$ と $[0,\pi]$ であるとする．曲線 $y = \cos^{-1}(x + \frac{1}{2})$ を描け．また，この曲線と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を求めよ．

(問 4) 実関数 $g(t)$ が満たす次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + \sin t = 0$$

また，初期値 $g(0) = 2,\ \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ に対する特解を求めよ．

(問 5) $D = \{\,(x,y) \mid 0 \le 2x - y \le 1,\ 0 \le x + 3y \le 2\,\}$ とする．
変数変換 $u = 2x - y,\ v = x + 3y$ を用いて，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{(2x-y)^3}{4 + (x+3y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

第2問（数学）

以下のような4次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考え，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$ を4次元実数ベクトル，すなわち $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ とする．また，あるベクトル $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^4$ に直交し，原点を含む超平面を P とし，ある点 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^4$ を中心とする半径 $a > 0$ の超球面を S とする．すなわち

$$\begin{aligned} \text{超平面}\ P = &\ \ \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 |\ \boldsymbol{n}^\top \boldsymbol{x} = 0\} \\ \text{超球面}\ S = &\ \ \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 |\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\| = a\} \end{aligned}$$

とする．ただし，$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2}$ とし，$\|\boldsymbol{n}\| = 1$ である．また，$\top$ は転置を表す．以下の問に答えよ．

(問1) A の 固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$ と，対応する固有ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ を求めよ．

(問2) $A\boldsymbol{x}$ の集合 $Q = \{A\boldsymbol{x} |\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\}$ は線形空間である．Q の次元と基底ベクトルを求めよ．ただし，基底ベクトルは互いに直交していなくてもよい．

(問3) $\boldsymbol{p} \in P$, $\boldsymbol{s} \in S$ とし，超平面 P と 超球面 S の距離 g を，$\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{s}\|$ の最小値と定義する．すなわち

$$g = \min_{\boldsymbol{p} \in P,\ \boldsymbol{s} \in S} \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{s}\|$$

である．g を $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{c}, a$ を用いて表せ．

(問4) $\boldsymbol{n} = (1, 0, 0, 0)^\top$, $\boldsymbol{c} = (1, 1, 1, 1)^\top$, $a = 1$ とし， $\boldsymbol{x}$ と $L = \{A\boldsymbol{p} |\ \boldsymbol{p} \in P\} \subset Q$ との距離 $d(\boldsymbol{x})$ を，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{l} \in L$ の間の距離の最小値として以下のように定義する．

$$d(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{l} \in L} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{l}\|$$

(1) $d(\boldsymbol{x})$ を，x_1, x_2, x_3, x_4 を用いて表せ．

(2) $\boldsymbol{s} \in S$ とする．$d(\boldsymbol{s})$ の最大値 $\max_{\boldsymbol{s} \in S} d(\boldsymbol{s})$ を求めよ．

第3問（数学）

$a > 0, x, y, X, Y$ を実数，e を自然対数の底，i を虚数単位とする．以下の問に答えよ．

(問1) 以下を示せ．

$$\lim_{X \to \infty} \left| \int_0^Y \mathrm{e}^{-a(X+\mathrm{i}y)^2} \mathrm{d}y \right| = 0 \tag{1}$$

(問2) 図1の積分経路による周回積分を利用し，以下の積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a(x+\mathrm{i}Y)^2} \mathrm{d}x$$

式(1) および $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ を用いてよい．

2変数実関数 $u(x,t)$ についての以下の偏微分方程式を考える．ただし，$t > 0$ は実数である．また，$u(x,t) \to 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) \to 0\ (|x| \to \infty)$ を満たすとする．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

(問3) 実数 k を用いて，$u(x,t)$ のフーリエ変換を

$$U(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x$$

と定義する．式(2) をフーリエ変換し，変数 t に関する U の常微分方程式として表せ．

(問4) $u(x,0) = \delta(x-1)$ の条件のもと，(問3) で求めた常微分方程式を解いて $U(k,t)$ を求めよ．ここでデルタ関数 $\delta(x)$ は以下で定義される．

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k$$

(問5) $U(k,t)$ の逆フーリエ変換は

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(k,t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k$$

で与えられる．(問4) の条件での $u(x,t)$ を求めよ．

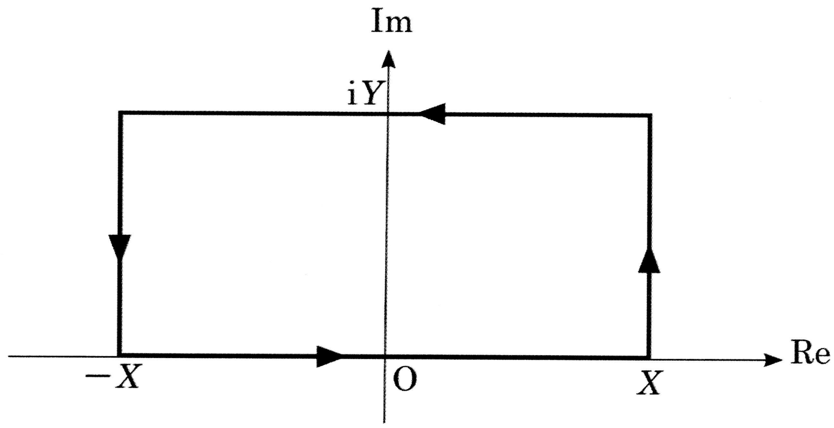

図 1: 積分経路

第4問（数学）

表1, 2に示す柏キャンパスまでの2つの通学路を考える．徒歩，自転車，電車，バスの所要時間は，表1, 2に示す平均と標準偏差をもつ正規分布に従い，これらはそれぞれ互いに独立と仮定する．標準正規分布に従う確率変数 X_0 が x_0 以上である確率を表3に示す．平均 μ，標準偏差 $\sigma > 0$ の正規分布に従う確率変数 X の確率密度関数 f_X，モーメント母関数 M_X を

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),\ M_X(t) = \mathbb{E}_X[\exp(tX)]$$

とする．ここで $\mathbb{E}_X$ は確率変数 X に関する期待値であり，t は実数である．
以下の問に答えよ．ただし，$\sqrt{2} \approx 1.4,\ \sqrt{3} \approx 1.7,\ \sqrt{5} \approx 2.2,\ \sqrt{7} \approx 2.6$ を用いてもよい．

(問1) $Z = \alpha X + \beta$ が標準正規分布に従うとき，α, β を μ, σ を用いて表せ．

(問2) 確率変数 $X_i\ (i = 1, 2)$ が，平均 μ_i，標準偏差 $\sigma_i > 0$ の正規分布にそれぞれ独立に従うとする．実数 $a,\ b$ に対して $M_{aX_1+bX_2}(t) = \exp(At^2 + Bt + C)$ を満たす A, B, C を求めよ．

(問3) 通学路1の所要時間が75分以上である確率が含まれる区間を表4から選べ．

(問4) 通学路1を使うとする．99% の確率で10時までに柏キャンパスに着くための出発時刻を求めよ．

(問5) 通学路1の所要時間が通学路2の所要時間よりも25分以上長くなる確率が含まれる区間を表4から選べ．

表 1: 通学路 1

経路	平均	標準偏差
徒歩	15 分	2 分
↓		
電車 A	25 分	4 分
↓		
バス A	25 分	5 分

表 2: 通学路 2

経路	平均	標準偏差
自転車	25 分	4 分
↓		
電車 B	15 分	8 分
↓		
バス B	15 分	8 分

表 3: 確率

x_0	$\Pr\{X_0 \geq x_0\}$
1.00	16%
1.28	10%
1.44	7.5%
1.65	5.0%
1.96	2.5%
2.33	1.0%
2.58	0.5%

表 4: 選択肢

区間
10–16%
7.5–10%
5.0–7.5%
2.5–5.0%
1.0–2.5%
0.5–1.0%
0.0–0.5%

第５問（物理学）

水平な床と水平な天井の間で，鉛直方向にのみ運動する質量 m の質点を考える．図１に示すように，鉛直上向きに y 軸をとり，床の位置を $y=0$，天井の位置を $y=H$ とする．質点と床および天井の間の反発係数は１（完全弾性衝突）とし，重力加速度の大きさを g とする．

(問 1) 静止している質点を位置 $y=H/2$ から落下させる．空気抵抗は無視できるものとし，以下の問に答えよ．

(1) 質点が運動を始めてから，最初に床に到達するまでの所要時間 T と，衝突の際に質点が床に与える力積 I を求めよ．

(2) 質点が鉛直方向の往復運動を十分長時間継続した場合，質点が床に与える力の時間平均値を求めよ．

(問 2) 質点を初速度 $dy/dt=-V_0$ で位置 $y=H/2$ から落下させる．空気抵抗は無視できるものとし，以下の問に答えよ．

(1) 質点が床で跳ね返った後，天井に到達するための条件を求めよ．

(2) (1) の条件が成立した状態で，質点が鉛直方向の往復運動を十分長時間継続した場合，質点が床および天井に与える力の時間平均値をそれぞれ求めよ．

(問 3) 次に，速度に比例する空気抵抗 $-k(dy/dt)$ が質点に働くとする．ただし k は正の定数である．時刻 $t=0$ に，静止している質点をある位置から落下させると，時刻 $t=m/k$ に床に最初に到達した．自然対数の底を e とし，以下の問に答えよ．

(1) 質点の運動方程式を示せ．

(2) 質点が床に最初に到達したときの速度を求めよ．

(3) 質点が床で最初に跳ね返った後，最も高い位置に到達する時刻を求めよ．

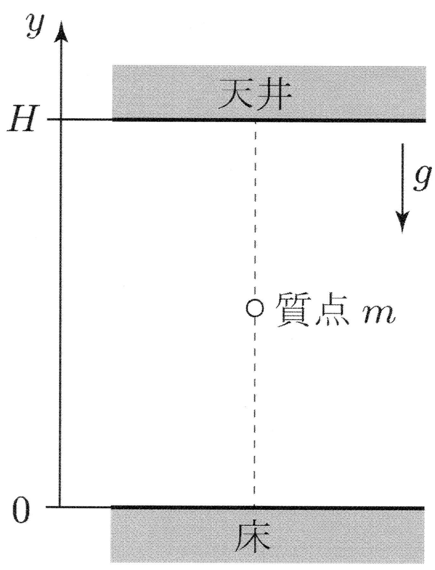

図 1

第 6 問（物理学）

一様な磁場 $\boldsymbol{B}$ の中を速度 $\boldsymbol{v}$ で移動する粒子（質量 m，電荷 q）の運動について考える．重力の影響は無視する．

(問 1) 粒子にかかる力を $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{v}$，q を用いて表せ．

(問 2) $|\boldsymbol{B}| = B$ とし，磁場に垂直な平面上における速度の絶対値を $v_\perp$ とする．$v_\perp \neq 0$ のときこの面上に射影した粒子の動きは円運動になる．この円運動の半径と角周波数を求めよ．

(問 3) 磁場 $\boldsymbol{B}$ の方向に軸をもつ接地された導体製の中空円筒（内半径 1.0×10^{-1}[m]）がある．この円筒の中心軸上のある点から，運動エネルギー W[eV] の電子が軸と垂直方向に飛び出すとき，電子が円筒内壁に到達するために必要な W の最小値を求めよ．また $|\boldsymbol{B}| = 5.0 \times 10^{-4}$[T] とし，電荷素量は 1.6×10^{-19}[C]，電子質量は 9.1×10^{-31}[kg] である．

軸対称を保ちつつ空間的に緩やかに強度変化する静磁場がある．この対称軸を z 軸とする円柱座標系 (r, θ, z) において (図 1)，z 軸を円運動の中心とする粒子（質量 m，電荷 q）について考える．このときの磁場を $\boldsymbol{B} = (B_r, B_\theta, B_z)$ とし，$B_\theta = 0$ である．なお，粒子の軌道半径は磁場強度の空間変化のスケールよりも十分小さいものとする．

(問 4) 磁場の発散に関する法則（ガウスの法則）を上述の円柱座標系で表せ．また，磁場 $\boldsymbol{B}$ の r 成分（B_r）を，r と $\dfrac{\partial B_z}{\partial z}$ を用いて表せ．以下の円柱座標系における発散の式を用いてよい．ただし $\dfrac{\partial B_z}{\partial z}$ は r によらないものとする．

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

(問 5) 粒子が受ける z 軸方向の力 f_z を磁気モーメント μ_m を用いて表せ．磁気モーメントは，円電流 I と，電流 I が囲む面積 S の積 IS で定義される．

(問 6) 粒子が力 f_z によって z 方向に微小距離 Δz だけ移動するとき，粒子の z 方向の運動エネルギーの変化量を求めよ．またこのとき磁気モーメント μ_m が保存することを示せ．

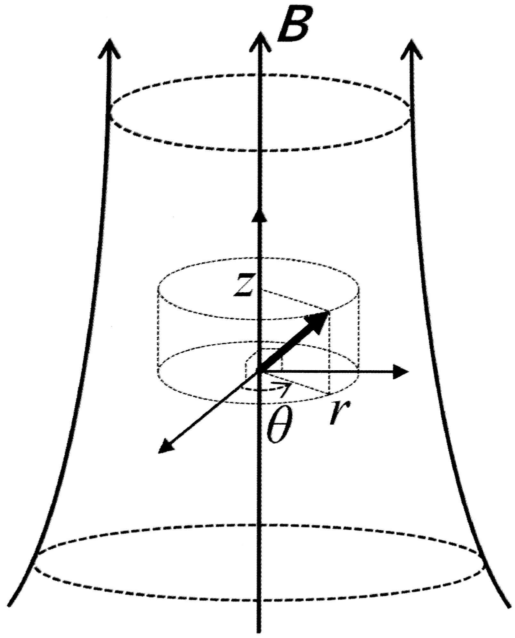

図 1

第７問（物理学）

質量 m の粒子 N 個からなる３次元気体が温度 T の熱浴と平衡状態にあるとする．気体の占める体積を V とする．粒子間の相互作用はないものとする．

(問1) i 番目の粒子の位置と運動量をそれぞれ $\boldsymbol{x}_i$，$\boldsymbol{p}_i$ とする．粒子の回転・振動が無視できるとして，以下の問に答えよ．

(1) この系のハミルトニアン H を書け．

(2) 分配関数

$$Z = \frac{1}{N!}\int\left(\prod_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i\mathrm{d}\boldsymbol{x}_i}{h^3}\right)\exp(-\beta H)$$

を計算せよ．ただし，$\beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$，$k_\mathrm{B}$ はボルツマン定数，h はプランク定数である．必要に応じて，$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\exp(-at^2) = \sqrt{\pi/a}$ を用いて良い．

(3) ヘルムホルツ自由エネルギー $F = -k_\mathrm{B}T\ln Z$ を計算せよ．$N \gg 1$ で成り立つスターリングの公式 $\ln N! \simeq N\ln N - N$ を適用し，F が示量性を持つことを示せ．

(4) 内部エネルギー $U = F - T(\partial F/\partial T)$ を計算し，定積熱容量が

$$C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V = \frac{3}{2}Nk_\mathrm{B}$$

となることを示せ．

(問2) この粒子を慣性モーメント I，電気双極子モーメント q をもつ二原子分子であるとし，その回転運動を考える．一様な外部電場 E がかかっているとき，i 番目の分子の軸の電場に対する角度を θ_i，その方位角を ϕ_i で表すと，分子の回転運動のハミルトニアンへの寄与 H_rot は

$$H_\mathrm{rot} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2I}\left(p_{\theta,i}^2 + \frac{p_{\phi,i}^2}{\sin^2\theta_i}\right) - qE\cos\theta_i\right)$$

と書ける．ここで，$p_{\theta,i}$，$p_{\phi,i}$ はそれぞれ i 番目の粒子の θ_i，ϕ_i 方向の角運動量である．

(1) 回転運動に関する分配関数

$$Z_\mathrm{rot} = \int\left(\prod_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}p_{\theta,i}\mathrm{d}p_{\phi,i}\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}\phi_i}{h^2}\right)\exp(-\beta H_\mathrm{rot})$$

を計算せよ．

(2) 回転運動の内部エネルギーへの寄与を計算せよ．回転運動の定積熱容量への寄与を，$k_\mathrm{B}T \ll qE$ と $k_\mathrm{B}T \gg qE$ の２つの極限で，それぞれ評価せよ．

(3) 系の分極（$\sum_{i=1}^{N} q\cos\theta_i$ の期待値）を計算せよ．

第８問（物理学）

質量 m，エネルギー E の粒子について，x 座標 (定義域は $(-\infty, \infty)$) に沿って与えられたポテンシャルエネルギー $V(x)$ のもとでの運動が波動関数 $\psi(x)$ で記述されるとする．ここでは定常状態について考えることとし，波動関数の時間依存は考慮しなくてよいものとする．このとき，確率の流れの密度は

$$j(x) = -\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\left(\psi^*(x)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) - \psi(x)\frac{\partial}{\partial x}\psi^*(x)\right)$$

で与えられる．以下の問に答えよ．ただし，$\hbar$ は，換算プランク定数であり ($\hbar = h/2\pi$)，* は複素共役を表わす．

(問 1) $+x$ 方向に伝搬する波を表す波動関数が $\psi(x) = A\exp(\mathrm{i}kx)$ で与えられる．この波動関数に対応する確率の流れの密度を求めよ．ただし A は複素数の定数，k は実数の定数とする．

(問 2) 波動関数が $\psi(x) = A\exp(-kx)$ で与えられる場合の確率の流れの密度を求めよ．ただし A は複素数の定数，k は実数の定数とする．

(問 3) $x < 0$ で $V(x) = 0$，$0 \leq x$ で $V(x) = V_0$ と定義されるポテンシャルに，$x < 0$ の領域から粒子が $+x$ 方向に入射する．粒子のエネルギー E は，$0 < E < V_0$ である．波動関数がなめらかに接続することを利用して，各領域での波動関数を求めよ．ただし，$x < 0$ の領域での波動関数は，$\psi(x) = A\exp(\mathrm{i}kx) + B\exp(-\mathrm{i}kx)$ で表されるとし，解については A を含んだ形で表示してもよい．A と B は複素数の定数とする．

(問 4) (問 3) の結果について，波動関数の表式から入射波，反射波，透過波の各成分についての確率の流れの密度の絶対値を求めて，このポテンシャルに対する反射率と透過率を求めよ．

(問 5) $x < 0$ と $a < x$ で $V(x) = 0$，$0 \leq x \leq a$ で $V(x) = V_0$ と定義されるポテンシャルに $x < 0$ の領域から粒子が $+x$ 方向に入射する．また $0 < E < V_0$ である．このポテンシャルに対する反射率と透過率を求めよ．ただし，a は正の実数である．

(問 6) (問 5) について，$E = V_0/2$，$V_0 \gg \hbar^2/(ma^2)$ の時の透過率を求めよ．