東京大学大学院
新領域創成科学研究科
複雑理工学専攻

受験番号					

問題冊子にも受験番号を書きなさい.

平成 31 年度大学院入学試験問題

修士課程

専門基礎科目

平成 30 年 8 月 21 日（火）

13:30～16:00（150 分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけません.
2. 本冊子の総ページ数は 17 ページです．落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
3. 解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい.
4. 問題は，必修問題 1 問，選択問題として数学 3 問，物理学 4 問，合計 8 問出題されます．必修問題 1 問（第 1 問）と，選択問題（第 2～8 問）から 2 問を選択して，合計 3 問を解答しなさい．解答する選択問題 2 問は，1 科目の中から選択しても，複数科目から選択してもよい.
5. 解答用紙は計 3 枚配られます．各問題ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用しなさい．解答用紙に書ききれない場合は，裏面にわたってもよい.
6. 解答は日本語または英語で記入しなさい.
7. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入しなさい．問題冊子にも受験番号を記入しなさい.
8. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと.
9. 解答に関係ない記号，符号などを記入した答案は無効とする.
10. 解答用紙・問題冊子は持ち帰ってはいけません.

第 1 問（必修問題）

$f(x,y)$ $(x,y\in\mathbb{R},\ (x,y)\neq(0,0))$ を実関数とし，微分方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+f=0 \tag{1}$$

を極座標 (r,θ) $(r,\theta\in\mathbb{R},\ r>0)$ を用いて考える．ここで $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とする．$g(r,\theta)=f(x(r,\theta),\ y(r,\theta))$ として，以下の問に答えよ．

(問 1) r を x,y を用いて表せ．

(問 2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=A(r,\theta)\dfrac{\partial g}{\partial r}+B(r,\theta)\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ と表されるとき，$A(r,\theta)$, $B(r,\theta)$ を求めよ．

$\dfrac{\partial \theta}{\partial x}=-\dfrac{\sin\theta}{r}$ を用いてよい．

(問 3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=D(r,\theta)\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}+E(r,\theta)\dfrac{\partial g}{\partial r}+F(r,\theta)\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}+G(r,\theta)\dfrac{\partial g}{\partial \theta}+H(r,\theta)\dfrac{\partial^2 g}{\partial r\partial \theta}$

と表されるとき，$D(r,\theta)$, $E(r,\theta)$, $F(r,\theta)$, $G(r,\theta)$, $H(r,\theta)$ を求めよ．

(問 4) 式 (1) の微分方程式において，変数を極座標に変換して $g(r,\theta)$ に関する微分方程式を求めよ．$\dfrac{\partial \theta}{\partial y}=\dfrac{\cos\theta}{r}$ を用いてよい．

(問 5) (問 4) で求めた微分方程式の解が，$g(r,\theta)=R(r)\sin\theta$ と書けると仮定する．$R(r)$ は微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\left(1-\frac{1}{r^2}\right)R=0 \tag{2}$$

を満たすことを示せ．

(問 6) 式 (2) の微分方程式の解が，項別微分可能な級数 $R(r)=r+\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}C_m r^{m+1}$ と書けると仮定する．

(1) C_1, C_2 の値を求めよ．

(2) 整数 $n\geq 1$ に対して，C_{n+2} を C_n を用いて表せ．

第２問（数学）

整数 $n \geq 1$ に対して，三項間漸化式

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,\ x_1 = 1,\ x_2 = 1$$

を考える．以下の問に答えよ．

(問 1) $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ を満たす 2×2 実行列 A を求めよ．

(問 2) 行列 A の固有値 λ_+, λ_- $(\lambda_+ > \lambda_-)$ を求めよ．

(問 3) 行列 A の対角化を用いて，

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_+^{n-1} - \lambda_-^{n-1} & \lambda_+^n - \lambda_-^n \\ \lambda_+^n - \lambda_-^n & \lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

を示せ．

以下の問では，式 (1) を用いてよい．

(問 4) $x_n = \alpha\lambda_+^n + \beta\lambda_-^n$ を満たす実数 α, β を求めよ．

(問 5) 実数 a, b に対して三項間漸化式

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n,\ y_1 = a,\ y_2 = b$$

を考える．y_n $(n \geq 3)$ を a, b, x_{n-1}, x_{n-2} を用いて表せ．

(問 6) $D_1 = 1, D_n$ $(n \geq 2)$ を $n \times n$ 三重対角行列 B_n の行列式とする．

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (n \geq 3)$$

のとき，D_n $(n \geq 3)$ を x_{n-1} および x_{n-2} を用いて表せ．

第3問（数学）

t, ω を実数とし，実関数 $f(t)$ のフーリエ変換を以下のように定義する．

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

ここで e は自然対数の底，i は虚数単位である．また，sinc 関数 $s(\omega)$ を以下のように定義する．

$$s(\omega) = \frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

以下の問に答えよ．

(問 1) 以下の関数 $g(t)$ のフーリエ変換を求め，sinc 関数を用いて表せ．

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

(問 2) 実関数 $p(t), q(t)$ に対する畳み込み積分を

$$(p * q)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)q(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

と定義する． $h(t) = (g * g)(t)$ を求めよ．

(問 3) 以下の関数 $k(t)$ のフーリエ変換を求め，sinc 関数を用いて表せ．

$$k(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

(問 4) $l(t)$ のフーリエ変換が $L(\omega) = \{s(\frac{\omega}{2})\}^3$ で与えられるとき，$l(t)$ を求めよ．

第４問（数学）

k と n を 2 以上の整数とする．確率変数 $X \in \{1, 2, \ldots, k\}$ について，事象 $X = a$ の確率が

$$\Pr[X = a] = \begin{cases} 2^{-a}, & a = 1, 2, \ldots, k-1 \\ 2^{-(k-1)}, & a = k \end{cases}$$

で与えられている．また，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を互いに独立で X と同じ分布に従う確率変数とする．$X_1, X_2, \ldots, X_n$ のうちの最小値を $Y_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ とする．以下の問に答えよ．

(問 1) $k = 5$ とする．$\Pr[X \geq a]$ を $a = 1, 2, 3, 4, 5$ に対して求めよ．

(問 2) $k = 5$ とする．確率変数 $Z = 2^X$ の期待値と分散を求めよ．

(問 3) k を 2 以上の整数とする．$\Pr[Y_n \geq a]$ を $a = 1, 2, \ldots, k$ に対して求めよ．

(問 4) k を 2 以上の整数とする．Y_n の期待値を求めよ．

第５問（物理学）

地球を一定の角速度で回転する剛体球とする．地球の中心 O を原点とする静止座標系 $\Sigma(x,y,z)$ において，この角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}=(0,0,\omega)$ と表す．図１に示すように北半球の緯度 $\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ の点 P を原点として地球表面に固定された回転座標系を $\Sigma'(x',y',z')$ とし，地球中心方向を $-z'$ 軸，接平面上で南を $+x'$ 軸，東を $+y'$ 軸と定義する．

(問 1) 点 P の位置を地球中心からのベクトル $\boldsymbol{r}$ で表すとき，その時間微分 $\dot{\boldsymbol{r}}$ が次の式 (1) で表せることを示せ．

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{1}$$

(問 2) Σ' における地球の角速度ベクトルを成分表示せよ．

(問 3) ある点の位置を表すベクトルは，各座標系の基底ベクトルを用いて Σ では $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，$\Sigma'$ では $\boldsymbol{r}'=x'\boldsymbol{e}_{x'}+y'\boldsymbol{e}_{y'}+z'\boldsymbol{e}_{z'}$ と表せる．点 P にある質点が Σ' において速度 $\boldsymbol{v}'$，加速度 $\boldsymbol{a}'$ で運動しているとき，Σ における速度 $\boldsymbol{v}$ と加速度 $\boldsymbol{a}$ を表す次の式 (2)，(3) を導け．

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{3}$$

(問 4) Σ' において，地球中心に向かう重力加速度 $\boldsymbol{g}'=(0,0,-g')$ を受ける質点の運動方程式を式 (3) を用いて求めよ．ただし ω^2 のオーダーの項は無視してよい．

(問 5) Σ' において，点 P の上方高さ h' の点から初速度 0 で落下する質点が地面に到達するまでの時間を求めよ．またこのとき落下地点の点 P からの y' 方向のずれを求めよ．ただし h' は地球半径に比べて十分に小さく θ と g' は一定とみなす．また ω^2 のオーダーの項は無視してよい．空気粘性の効果は無視する．

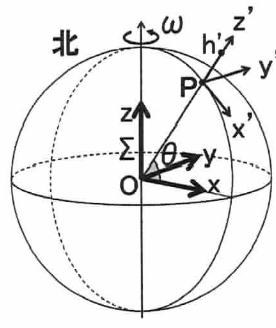

図１

第6問（物理学）

(x,y,z) 直交座標系が定義された真空の空間を考え，その誘電率を ε_0 とする．図1に示すように，原点を中心とした半径 R の球内部に総電荷量 $+q$（ただし $q>0$）の電荷が一様な密度で分布している．球内の電荷分布は変化しないものとして以下の問に答えよ．

(問1) 球の内外の電場強度 $|E|$ を，原点からの距離 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ の関数として表せ．

(問2) 球の内外の静電ポテンシャル ϕ を，原点からの距離 r の関数として表せ．ただし，無限遠における静電ポテンシャルはゼロとする．

図1の電荷分布に加えて，$-q$ の点電荷を球の内外の任意の位置に初速度ゼロで置くことができるものとする．

(問3) 点電荷が静止を続ける位置を求めよ．

(問4) 空間的に一様な z 方向電場 E_0（ただし $E_0>0$）が印加された場合，点電荷が静止を続ける位置が少なくとも一ヶ所存在する条件と，その位置を求めよ．

次に，図2に示すように真空中の点 $(x,y,z)=(0,0,d/2)$ の位置に $+q$ の点電荷と，$(x,y,z)=(0,0,-d/2)$ の位置に $-q$ の点電荷が存在している場合を考える．これら二つの点電荷が作る静電ポテンシャルは，原点から十分離れた地点（$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\gg d$）では，

$$\phi \approx \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}$$

と近似できる．

(問5) 原点から十分離れた地点のうち，電場の xy 平面内成分がゼロとなる位置を求めよ．

(問6) 原点から十分離れた地点のうち，電場の z 方向成分がゼロとなる位置を求めよ．

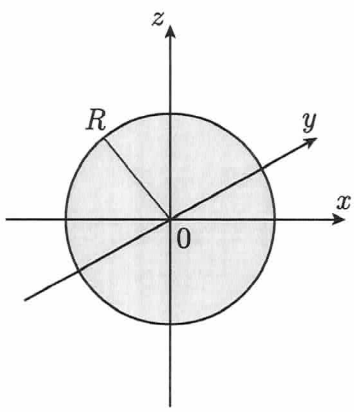

図 1

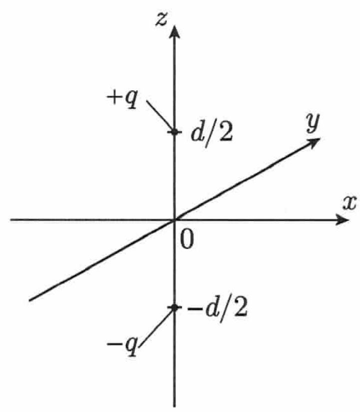

図 2

第7問（物理学）

温度T，圧力Pを熱力学変数として，純粋な水の相平衡について考える．1モルの水の気相，液相，固相のエントロピーSと体積Vがそれぞれ(S_g, V_g)，(S_l, V_l)，(S_s, V_s)で表されるとする．但し，水の分子量は18とし，1 atmでの水の融点は0°Cとする．水蒸気は理想気体として扱えるものとする．また，簡単のため$0\,°\mathrm{C} = 273\,\mathrm{K}$, $1\,\mathrm{atm} = 0.10$ MPaを用いよ．必要に応じて以下の数値を用いてよい．気体定数$R = 8.31\,\mathrm{JK^{-1}mol^{-1}}$, 0°C 1 atmでの氷の融解熱: $6.02\,\mathrm{kJmol^{-1}}$, 水の蒸発熱：$45.0\,\mathrm{kJmol^{-1}}$．0°C 1 atmでの水の密度: $1.00\,\mathrm{g/cm^3}$, 氷の密度: $0.917\,\mathrm{g/cm^3}$.

(問1) ギブスエネルギーGは内部エネルギーUを用いて，$G = U + PV - TS$と定義される．ギブスエネルギーの全微分が$\mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}P$で表されることを示せ．但し，$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V$を使ってもよい．

(問2) 気相と液相が平衡になっているときに，それぞれのギブスエネルギーG_gとG_lの間に成り立つ条件を書け．

(問3) 液相-気相間の相転移に伴う1モル当たりの転移潜熱（蒸発熱）をQとするとき，Qが温度とエントロピーを用いてどのように表されるか示せ．

(問4) 気相と液相が平衡になっているときに$\mathrm{d}P/\mathrm{d}T$の表式を導け．

(問5) 0°C 1 atmにおける気相と液相のモル体積の比を有効数字2桁で求めよ．

(問6) 問4の結果からPをTの関数として表せ．但し，$V_g \gg V_l$として，V_lを無視できるとする．また，基準温度T_0において圧力はP_0の値を取るとする．ここで，Qは温度に依存しないとして良い．

(問7) 固相-液相間の相転移に関して，0°C近傍の$\mathrm{d}P/\mathrm{d}T$の値を有効数字2桁で求めよ．単位も明示すること．

(問8) 図1は，0°C近傍の水の相図を描いたものである．(あ) - (え）の空欄に対応する語句を記せ．また，a,b,cのうち適切な境界線を選び，その理由を簡潔に示せ．

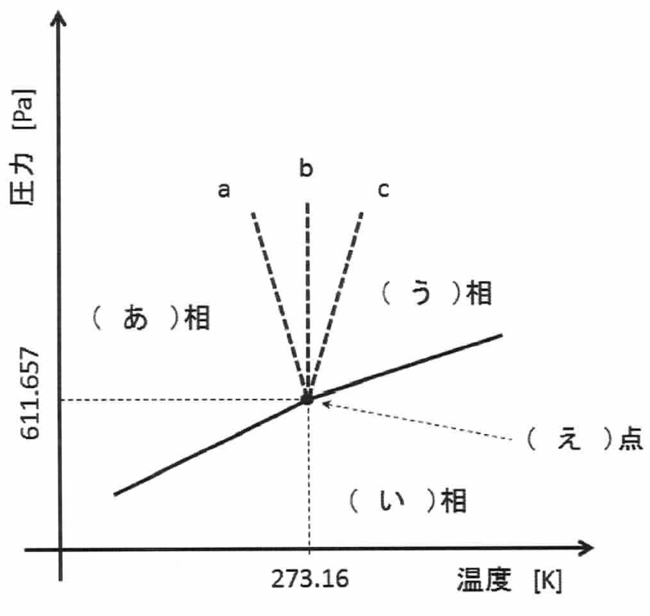

図 1

第8問（物理学）

次のハミルトニアンで表される1次元の量子力学的調和振動子

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$$

を考える．ここで，m は質点の質量，ω は角周波数の次元を持つパラメータ，$\hat{x}$ は位置演算子，$\hat{p}$ は運動量演算子である．生成・消滅演算子 $\hat{a}^\dagger$，$\hat{a}$ を

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\hat{p}\right), \quad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\hat{p}\right)$$

のように定義する．i は虚数単位，$\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割ったものである．以下の問題では必要に応じて交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を使って良い．また，演算子 $\hat{A}$ で表される物理量 A の期待値を $\langle\hat{A}\rangle$，標準偏差を $\Delta A \equiv \sqrt{\langle(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2\rangle}$ と書く．

(問1) 位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ を生成・消滅演算子 $\hat{a}^\dagger$，$\hat{a}$ を用いて表せ．

(問2) 基底状態 $|0\rangle$ は $\hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす．基底状態について，以下の問いに答えよ．

(1) 期待値 $\langle\hat{x}\rangle$，$\langle\hat{x}^2\rangle$，$\langle\hat{p}\rangle$，$\langle\hat{p}^2\rangle$ を求めよ．

(2) 位置と運動量の標準偏差の積（$\Delta x \Delta p$）を求めよ．

(問3) ハミルトニアン $\hat{H}$ を個数演算子 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ を用いて書き直せ．

(問4) 交換関係 $[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^n]$（$n$ は自然数）を $\hat{a}^\dagger$ と n を用いて表せ．

(問5) 第 n 励起状態（n は自然数）は

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

で表される．$|n\rangle$ は個数演算子 $\hat{n}$ の固有状態であることを示し，$|n\rangle$ のハミルトニアン $\hat{H}$ に対する固有値を求めよ．

(問6) 複素数 α を用いて表される状態

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

に関して，以下の問いに答えよ．e は自然対数の底とする．

(1) この状態が消滅演算子 $\hat{a}$ の固有状態であることを示せ．また，対応する固有値を求めよ．

(2) 個数演算子 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ の期待値 $\langle\hat{n}\rangle$ と標準偏差 Δn を求めよ．