東京大学大学院
新領域創成科学研究科
複雑理工学専攻

受験番号					

問題冊子にも受験番号を書きなさい.

平成30年度大学院入学試験問題

修士課程

専門基礎科目

平成29年8月22日（火）

13:30〜16:00（150分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけません.
2. 本冊子の総ページ数は15ページです．落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
3. 解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい.
4. 問題は，必修問題1問，選択問題として数学3問，物理学4問，合計8問出題されます．必修問題1問（第1問）と，選択問題（第2〜8問）から2問を選択して，合計3問を解答しなさい．解答する選択問題2問は，1科目の中から選択しても，複数科目から選択してもよい.
5. 解答用紙は計3枚配られます．　各問題ごとに必ず1枚の解答用紙を使用しなさい．解答用紙に書ききれない場合は，裏面にわたってもよい.
6. 解答は日本語または英語で記入しなさい.
7. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入しなさい．問題冊子にも受験番号を記入しなさい.
8. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと.
9. 解答に関係ない記号，符号などを記入した答案は無効とする.
10. 解答用紙・問題冊子は持ち帰ってはいけません.

（草稿用紙）

（草稿用紙）

（草稿用紙）

第1問（必修問題）

関数 $f(x,y)=(x+y)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ について，以下の問に答えよ．ただし，x,y は実数であり，e は自然対数の底とする．

(問1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を求めよ．

(問2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ および $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ．

(問3) 関数 f を $(x,y)=(1,-1)$ のまわりで二次の項までテイラー展開せよ．

(問4) 関数 f が $(x,y)=(0.5,0.5)$ において極大値をとることを示せ．

(問5) $x^2+y^2=1$，$x,y \geq 0$ の条件下で，関数 f の極値を求めよ．

第 2 問（数学）

実数の集合および非負実数の集合をそれぞれ $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ とする．次の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \in \mathbb{R}^3$ および 3×4 行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ を考える．

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4 次元ベクトルを $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4$ で表す．ここで $\top$ はベクトルの転置を表す．さらに，集合 P を

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4_+ : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$$

と定義する．このとき，以下の問に答えよ．

(問 1) 集合 $S \subset \mathbb{R}^3$ を $x_1 + x_3 = 1$ かつ $x_2 + x_4 = 1$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ に対して点 $\boldsymbol{Ax}$ がなす集合とする，すなわち

$$S = \left\{\boldsymbol{Ax} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4,\, x_1 + x_3 = 1,\, x_2 + x_4 = 1\right\}$$

とする．S と直交する単位ベクトル $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ を求めよ．

(問 2) $x_4 = 0$ かつ $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{a}_4$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ を求めよ．

(問 3) $\boldsymbol{x} \in P$ のうち次の 2 つの条件を同時に満たすものを 1 つ挙げよ．ここで，(問 2) の結果を用いてもよい．

(a) $x_4 = 0$

(b) $\boldsymbol{y}\boldsymbol{a}_4 \leq \boldsymbol{yAx}$ が任意の $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3_+$ に対して成り立つ

(問 4) 任意の固定した $\boldsymbol{x}' \in P$ に対して，次の 2 つの条件を同時に満たす $\boldsymbol{x} \in P$ が存在することを示せ．ここで，(問 3) の結果を用いてもよい．

(a) $x_4 = 0$

(b) $\boldsymbol{yAx}' \leq \boldsymbol{yAx}$ が任意の $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3_+$ に対して成り立つ

第3問（数学）

t, ω を実数とし，関数 $f(t)$ のフーリエ変換と，その逆フーリエ変換をそれぞれ以下のように定義する．

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega$$

ここで e は自然対数の底，i は虚数単位である．以下の問に答えよ．ただし，以下で与えられるデルタ関数 $\delta(\omega)$ を用いてもよい．

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t$$

(問 1) ω_0 を実定数として，$\cos(\omega_0 t)$ のフーリエ変換を求めよ．

(問 2) $f(t)$ が実偶関数のとき，$F(\omega)$ が実数関数となることを示せ．

(問 3) 実偶関数 $f(t)$ が以下で与えられる場合を考える．

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N} \cos(\omega_n t)$$

ここで N は正の整数である．この ω_n が，正の実定数 t_0 を用いて

$$\omega_n = \frac{(1+4n)\pi}{2t_0} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

と与えられるとき，$f(t)$ が以下を満たすことを示せ．

$$f(t - t_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\omega) \sin(\omega t) \mathrm{d}\omega$$

(問 4) $G(\omega) = F(\omega)H(\omega)$ を考える．ここで $H(\omega)$ は以下で与えられる．

$$H(\omega) = \begin{cases} 2, & \omega > 0 \\ 1, & \omega = 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}$$

$G(\omega)$ の逆フーリエ変換を $g(t)$ とし，$f(t)$ が（問3）のように与えられるとき，$g(t)$ を $f(t)$ と $f(t - t_0)$ を用いて示せ．

第４問（数学）

プレイヤーはマシーンと一回のみゲームを行う．$i=1,2,\ldots,n$ とし，プレイヤーが値 i を出す確率を p_i とし，$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ とする．$j=1,2,\ldots,n$ とし，マシーンが値 j を出す確率を q_j とし，$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$ とする．プレイヤーとマシーンは，1 から n までの自然数を，この確率分布に従い出すものとする．プレイヤーとマシーンが同じ数を出したとき，プレイヤーの勝ちとする．このとき，以下の問に答えよ．

(問 1) $i=1,2,\ldots,n$ に対して，$p_i = 1/n$ とする．プレイヤーが勝つ確率を求めよ．

(問 2) $i=1,2,\ldots,n$ に対して，$p_i = p_1\alpha^{i-1}$ とし，$j=1,2,\ldots,n$ に対して，$q_j = q_1\beta^{j-1}$ とする．プレイヤーが勝つ確率を，α,β,n のみを用いて表せ．

(問 3) $i=1,2,\ldots,n$ に対して，$p_i = q_i$ とする．

(a) プレイヤーが勝つ確率の最小値を求めよ．

(b) マシーンが出す値の期待値が $(n+1)/2$ であるとする．プレイヤーが勝つ確率の最小値を求めよ．

(問 4) $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ をプレイヤーの戦略と呼ぶことにする．以下の二つの戦略を考える．

- 戦略 E: $(p_1,p_2,\ldots,p_{n-1},p_n) = (0,0,\ldots,0,1)$
- 戦略 R: $(p_1,p_2,\ldots,p_n) = (1/n,1/n,\ldots,1/n)$

ここで，$q_1,q_2,\ldots,q_n$ のうち，q_n が最大であるとする．

(a) 戦略 E は，戦略 R より優れていることを示せ．ここで，戦略 A, B に対して，戦略 A を用いたときのプレイヤーが勝つ確率が，戦略 B を用いた時のプレイヤーが勝つ確率以上のとき，戦略 A は戦略 B より優れているという．

(b) 戦略 E は，任意の戦略の中で最も優れていることを示せ．

第5問（物理学）

図1のように長さの変化する棒の先に質点がついている振り子がある．質点の質量を m，重力加速度を g，棒の長さを l，最下点からの棒の振れ角を θ とする．棒の質量，支点での摩擦，空気抵抗は無視する．θ の絶対値は常に $90°$ 以下であるとする．
棒の長さは初め l_0 であり，これを振れ角 $\theta_0\ (<0)$ の A 点で静止させ，静かに手を離す．質点が最下点 B にさしかかったところで短時間のうちに棒の長さを l_1 に縮め，質点を C 点に引き上げる．質点が運動を続けて最高地点 D に到達したところで，短時間のうちに棒の長さを l_0 に戻し，質点は E 点に至る．そのあと質点は B 点に向けて折り返す．なお，棒の長さの変化は十分に短時間で行われ，その間の振れ角の変化は無視できるものとする．

(問1) 最初に B 点に到達したときの質点の速さ v_{B} を g，l_0，θ_0 を用いて表せ．

(問2) C 点での質点の速さ v_{C} を角運動量保存則から l_0，l_1，v_{B} を用いて表せ．

(問3) 質点が E 点を経て再び B 点に戻ったときの運動エネルギーは，質点が最初に B 点を通過したときの運動エネルギーに比べ何倍になっているか．l_0，l_1 を用いて表せ．

(問4) 時刻を t として，長さ l が任意の時間変化を行うときの θ の時間についての二階微分（角加速度）についての方程式を書け．この式をもとに，最下点では l の時間微分が負であると進行方向の角加速度が生じることと，最高地点では l の時間微分が角加速度に影響しないことを，それぞれ説明せよ．

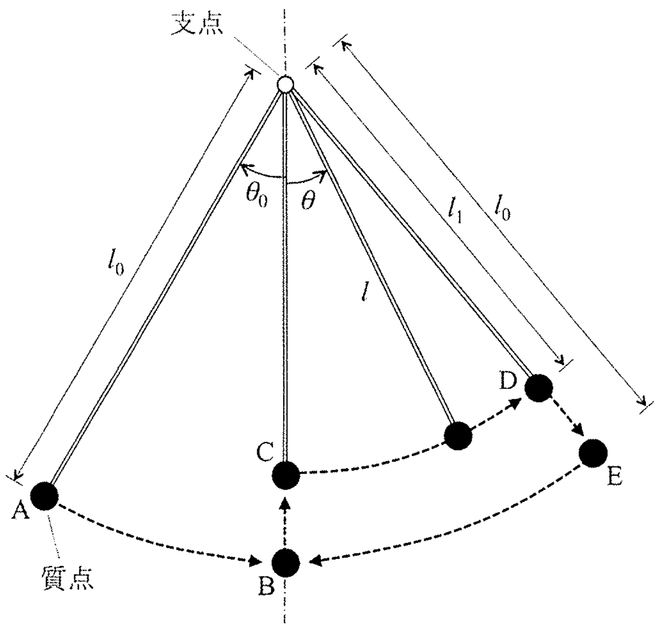

図1

第6問（物理学）

以下の問に答えよ．

(問1) 抵抗，電池，電流計（内部抵抗 $0.10\,\Omega$），電圧計（内部抵抗 $1.0\times10\,\Omega$）を図1のように結線した．電池の内部抵抗は無視できるものとする．このとき，電流計と電圧計はそれぞれ $1.0\,\mathrm{A}$ と $1.0\times10\,\mathrm{V}$ を示した．図2に示す回路に結線し直したとき，電流計と電圧計が示す値をそれぞれ有効数字2桁で答えよ．

(問2) 長さ $2.0\,\mathrm{m}$, 断面積 $3.0\,\mathrm{mm}^2$ の金属導線の電気抵抗値を有効数字2桁で答えよ．ただし，この金属の体積抵抗率は $6.3\times10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$ とする．

(問3) 内半径 a，外半径 $3a$ の無限に長い同軸中空円筒導体がある．この円筒の中心軸上に z 軸をもつ座標系を定める（図3）．$+z$ 方向に一様電流（電流密度 J）を流したとき，A $(0.5a,\ 0,\ 0)$，B $(0,\ 2a,\ 0)$，C $(3a,\ 3a,\ 0)$ の各点に発生する磁界 $\vec{H}$ を成分表示でそれぞれ答えよ．

(問4) 半径 a の無限に長い円柱導体（単位長さあたりの電気抵抗 R）に一様電流 I が流れている．円柱側面におけるポインティング ベクトルの向きを示し，大きさを答えよ．また，単位長さ，単位時間あたりの円柱導体に出入りするエネルギーの総量を答えよ．

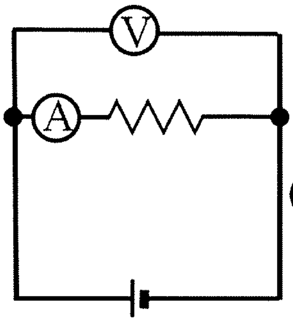

図1

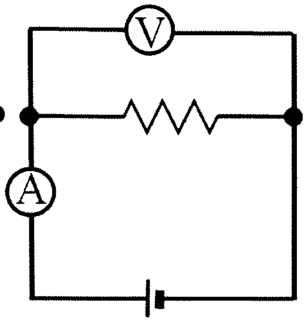

図2

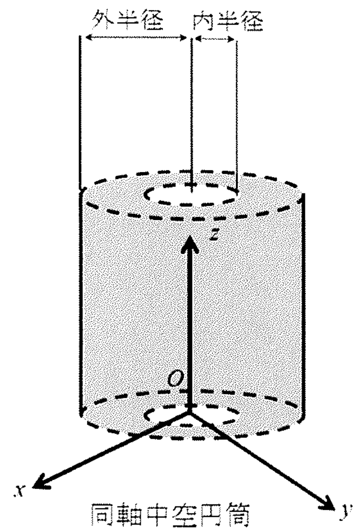

図3

第７問（物理学）

理想気体に関する以下の問に答えよ．ただし，気体定数を R，定積モル比熱を C_V とし，C_V は定数であるとする．

(問1) 絶対温度 T，体積 V，圧力 P の１モルの理想気体のエントロピー S を考える．準静的過程での内部エネルギー U の変化は $dU = TdS - PdV$ と書ける．これを用いて

$$S = C_V \log_e \frac{T}{T_0} + R \log_e \frac{V}{V_0} + S_0$$

を導け．ただし，S_0 は温度 T_0，体積 V_0 のときのエントロピーである．

(問2) 体積 V，温度 T_{A}，エントロピー S_{A} の１モルの理想気体Ａと体積 V，温度 T_{B} $(\neq T_{\mathrm{A}})$，エントロピー S_{B} の１モルの理想気体Ｂから成る系を考える。この系は，外界から熱的に隔離されている．A，Bは断熱壁を介して接している．ある時刻よりA，B間の断熱壁をエネルギーのやり取りのできる壁にしたところ，それぞれの温度が変化し始めた．ある時間が経ったときのそれぞれの温度を T'_{A}，T'_{B}，それぞれのエントロピーを S'_{A}，S'_{B} とする．この系のエントロピーの増分を $\Delta S = (S'_{\mathrm{A}} + S'_{\mathrm{B}}) - (S_{\mathrm{A}} + S_{\mathrm{B}})$ とし，これについて考える．ただし，A，Bの状態変化は準静的であるとする．また，定積モル比熱はA，Bともに C_V であるとする．ただし，断熱壁，およびエネルギーのやり取りのできる壁の熱容量は無視できるものとする．

(1) ΔS を C_V，T_{A}，T_{B}，T'_{A}，T'_{B} で表せ．

(2) 系全体の内部エネルギーの和が保存されることに注意して，(問2)(1)の解を C_V，T_{A}，T_{B}，T'_{A} で表せ．

(3) 孤立系の平衡状態はエントロピー最大の状態である．(問2)(2)で求めた ΔS が T'_{A} に対して極値をもつ条件を求め，この系の平衡状態での T'_{A} と T'_{B} を T_{A}，T_{B} で表せ．また，このとき ΔS が必ず正であることを示せ．

(4) A，Bの初期温度が T_{A}，T_{B} である場合に，この系が平衡に達した時の ΔS を $\Delta S_{T_{\mathrm{A}}+T_{\mathrm{B}}}$ とする．$\Delta S_{100\,\mathrm{K}+200\,\mathrm{K}}$ と $\Delta S_{50\,\mathrm{K}+250\,\mathrm{K}}$ の大小関係を示し，その理由を述べよ．

第8問（物理学）

以下の問に答えよ．プランク定数 h を 2π で割ったものを $\hbar$，光速度を c，電子の質量を m とする．

(問1) 一次元井戸型ポテンシャル $V(x)$ に束縛された1個の電子を考える．ここで，

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq L) \\ +\infty & (x < 0,\ x > L) \end{cases}$$

とする．エネルギー固有状態の波動関数 $\psi_n(x)$ とエネルギー固有値 E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を求めよ．ただし，$\psi_n(x)$ は規格化せよ．

(問2) 一次元調和振動子ポテンシャルにおける1個の粒子（質量 M）を考える．ハミルトニアン H は，固有角振動数 ω，演算子 $a = \sqrt{\dfrac{M\omega}{2\hbar}}\left(x + \dfrac{\hbar}{M\omega}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ と $a^\dagger = \sqrt{\dfrac{M\omega}{2\hbar}}\left(x - \dfrac{\hbar}{M\omega}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ を用いて，$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \dfrac{1}{2}\right)$ と書ける．

(1) 交換関係 $[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a$ のとる値を求めよ．

(2) 基底状態 $|0\rangle$ は，$a|0\rangle = 0$ を満たす．第一励起状態（基底状態からの遷移エネルギーが最も小さい励起状態）$a^\dagger|0\rangle$ と 基底状態 $|0\rangle$ の間のエネルギー差 ΔE_{vib} を求めよ．

(問3) 緑色蛍光タンパク質 GFP は，ピーク波長 488 nm の青色光を吸収し，ピーク波長 508 nm の緑色光を発する．この蛍光現象を GFP の電子状態にもとづいて考察する．なお，$hc = 1240\,\mathrm{eV\,nm}$，および $\dfrac{\hbar^2\pi^2}{2m} = 0.373\,\mathrm{eV\,nm^2}$ を用いてよい．

(1) 波長 488 nm，および波長 508 nm の電磁波の光子エネルギーを有効数字3桁で，eV 単位で表せ．

(2) GFP の電子状態について，(問1) の井戸型ポテンシャル（長さ $L = 1.4\,\mathrm{nm}$）に束縛された13個の電子としてモデル化する．電子間の相互作用を無視すると，GFP の基底状態から第一励起状態への遷移エネルギーは，$\Delta E_{\mathrm{elec}} = E_7 - E_6$ と表わされる．ΔE_{elec} を有効数字2桁で，eV 単位で表せ．

（草稿用紙）

（草稿用紙）

（草稿用紙）