東京大学大学院
新領域創成科学研究科
複雑理工学専攻

受　験　番　号					

問題冊子にも受験番号を書きなさい.

平成 29 年度大学院入学試験問題

修士課程

専門基礎科目

平成 28 年 8 月 23 日（火）

13:30～16:00（150 分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけません.
2. 本冊子の総ページ数は 17 ページです．落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
3. 解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい.
4. 問題は，必修問題 1 問，選択問題として数学 3 問，物理学 4 問，合計 8 問出題されます．必修問題 1 問（第 1 問）と，選択問題（第 2～8 問）から 2 問を選択して，合計 3 問を解答しなさい．解答する選択問題 2 問は，1 科目の中から選択しても，複数科目から選択してもよい.
5. 解答用紙は計 3 枚配られます.　各問題ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用しなさい．解答用紙に書ききれない場合は，裏面にわたってもよい.
6. 解答は日本語または英語で記入しなさい.
7. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入しなさい．問題冊子にも受験番号を記入しなさい.
8. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと.
9. 解答に関係ない記号，符号などを記入した答案は無効とする.
10. 解答用紙・問題冊子は持ち帰ってはいけません.

（草稿用紙）

（草稿用紙）

（草稿用紙）

第１問（必修問題）

以下の問に答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

（問 1）関数$\Gamma(s)$を

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \quad (s > 0)$$

と定義する．以下の値を求めよ．ガウス積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ を用いてよい．

(1) $\Gamma(1)$

(2) $\Gamma(0.5)$

（問 2）$s > 0$ に対して $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$となることを示せ．

（問 3）関数$B(\alpha,\beta)$を

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^{1} t^{\alpha-1}\,(1-t)^{\beta-1}\mathrm{d}t \quad (\alpha,\beta > 0)$$

と定義するとき，次式が成り立つことを示せ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right) \quad (m,n > 0)$$

（問 4）多重積分

$$I = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x-y}\,x^{p-1}y^{q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ (p,q > 0)$$

を$x+y=u$, $\frac{x}{x+y}=v$ と変数変換し，Iを上記の関数 Γ, Bで表現することにより，

Γ, B の間に次の関係式が成り立つことを示せ．

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

（問 5）次の積分値を求めよ．（問 1）～（問 4）の結果を用いてよい．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x\ \mathrm{d}x$$

第２問（数学）

行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，以下の問に答えよ．

(問 1) A^2, A^3 を求めよ．

(問 2) 行列 A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ をすべて求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする．

(問 3) 行列 A の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を求めよ．ただし，固有値 λ_i に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_i$ とし，その長さは全て 1 とする．

(問 4) $i = 1, 2, 3$ に対して，行列 P_i を $\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^\top$ とする．ただし，$\boldsymbol{v}_i^\top$ は $\boldsymbol{v}_i$ の転置とする．このとき，

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$$
$$E = P_1 + P_2 + P_3$$

であることを示せ．ただし，E は単位行列とする．

(問 5) 正の整数 n に対して，

$$A^n = \lambda_1^n P_1 + \lambda_2^n P_2 + \lambda_3^n P_3$$

が成り立つことを証明せよ．

(問 6) 正の整数 n に対して，A^n を求めよ．

第３問（数学）

関数 $f(x)$ のフーリエ変換を

$$\mathcal{F}_f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-\mathrm{i}xt) \mathrm{d}x$$

と定義する．ここで，x および t は実数，$\exp(x)$ は指数関数，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ である．このとき，以下の問に答えよ．

(問 1) 実数 a に対して $g(x) = f(x-a)$ とするとき，

$$\mathcal{F}_g(t) = \exp(-\mathrm{i}at)\mathcal{F}_f(t)$$

となることを示せ．

(問 2) 正の実数 b に対して $h(x) = f(bx)$ とするとき，

$$\mathcal{F}_h(t) = \frac{1}{b}\mathcal{F}_f\left(\frac{t}{b}\right)$$

となることを示せ．

(問 3) $f(x) = \exp(-|x|)$ とするとき，$\mathcal{F}_f(t)$ を求めよ．

(問 4) $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ とするとき，以下の積分を用いて $\mathcal{F}_f(t)$ を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x+\mathrm{i}t)^2\right) \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

(問 5) 関数 $f(x), g(x)$ の畳み込みを

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)\mathrm{d}s$$

と定義する．

μ_1, μ_2 を実数, σ_1^2,σ_2^2 を正の実数とし，

$$f_1(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2\right), \quad f_2(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2\right)$$

とするとき，$\mathcal{F}_{f_1 * f_2}(t)$ を求めよ．

第４問（数学）

表が出る確率が θ，裏が出る確率が $1-\theta$ のコインを考える．ただし，$0 \leq \theta \leq 1$ とする．以下の問に答えよ．

(問 1) 正の整数 n に対して，このコインを独立に n 回投げたとき，表が x 回出る確率を求めよ．ただし，x は $0 \leq x \leq n$ を満たす整数とする．

(問 2) 期待値 $E[x]$，分散 $E[(x - E[x])^2]$，実数 t に対する積率母関数 $E[\mathrm{e}^{tx}]$ を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．必要があれば，実数 a，b，および正の整数 r に対する二項定理

$$(a+b)^r = \sum_{k=0}^{r} \frac{r!}{(r-k)!k!} a^{r-k} b^k$$

を用いてよい．

(問 3) 尤度 $p(x|\theta)$ を最大にする θ を求めよ．

(問 4) θ の事前確率密度を

$$p(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\alpha-1}}{\int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau}$$

と定める．ただし，$\alpha > 1$ である．x が与えられたもとでの θ の事後確率密度 $p(\theta|x)$ を求めよ．

(問 5) (問 4) で求めた事後確率密度 $p(\theta|x)$ を最大にする θ を求めよ．

(問 6) 正の整数 m に対して同じコインを更に独立に m 回投げたとき，表が y 回出た．ただし，y は $0 \leq y \leq m$ を満たす整数とする．(問 4) で求めた事後確率密度 $p(\theta|x)$ を θ の事前確率密度として用いたとき，事後確率密度 $p(\theta|x, y)$ を最大にする θ を求めよ．

第５問（物理学）

摩擦のある水平面に質点とみなせる物体A（質量m）を置き，質量の無視できるばね（ばね定数k）を介して壁につないだ．ばねが自然長より長さa（$a>0$）だけ伸びるように物体Aを移動し，時刻$t=0$に静かに手を離した．物体Aは，振幅を減衰させながら，水平面上でN回（$N>2$）の往復運動を終えた時点で静止した．以下の問に答えよ．ただし，物体Aと水平面との間には静止摩擦係数μ_0，動摩擦係数μ（$\mu<\mu_0$）の摩擦力が働くものとする．空気の抵抗は無視する．重力加速度の大きさをgと記す．

（問１）　物体Aが動き始めるためのaの条件を記せ．

（問２）　物体Aが動き始めてから２回の往復運動を終えるまでに，ばねが伸縮した長さの時間変化をグラフに描け．

（問３）　物体AがN回の往復運動を終えた時点で静止するためのaの条件を記せ．

（問４）　物体Aが水平面に静止した時刻と，それまでの総移動距離を答えよ．

さらに，物体Aと同じ質量と摩擦係数をもつ物体Bを長さa（$a>0$）の紐を介して物体Aにつなぎ，図１のようにx軸を定める．ばねの長さが自然長になる時の物体Aの位置をx軸の原点とする．ばねが自然長より長さaだけ伸びるように物体Bをx軸の正方向に移動し，時刻$t=0$に静かに手を離した．すると，物体AとBは動き出し，しばらくした後に紐がたるみ，その後静止した．物体AとBがお互いにぶつかることはなかった．以下の問に答えよ．ただし，紐の質量は無視できるものとする．

（問５）　紐が最初にたるんだ時刻をt_1（$t_1>0$）とする．このときのばねの自然長からの長さを答えよ．

（問６）　$\dfrac{6\mu mg}{k}=a$を満たす時，紐が最初にたるんだ時刻t_1と物体Bが静止した位置の座標を求めよ．

（問７）　$\dfrac{6\mu mg}{k}=a$を満たす時，物体Aが静止した位置の座標を求めよ．

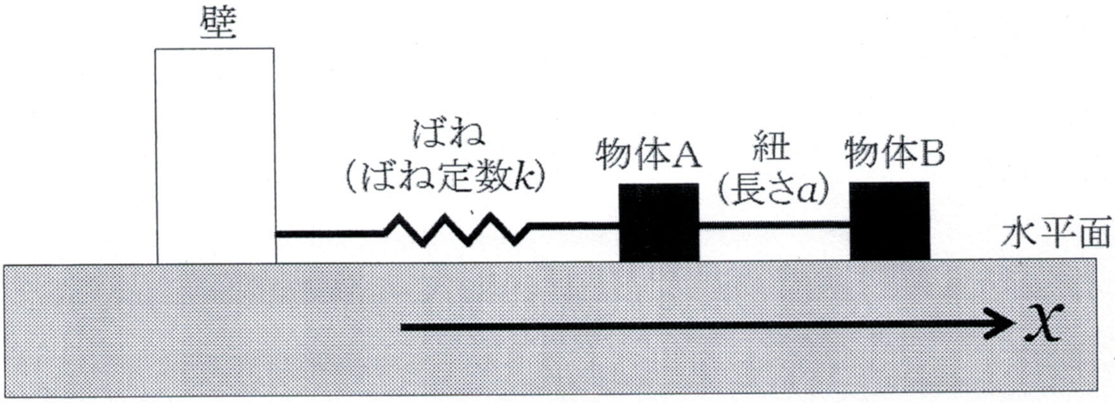

図 1

第６問（物理学）

電場を $\boldsymbol{E}$，磁場を $\boldsymbol{B}$ と表す．空間に存在する全ての電荷密度および電流密度を，それぞれ ρ および $\boldsymbol{J}$ で表現する．マックスウェルの方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} + \nabla \times \boldsymbol{E} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} - \nabla \times \boldsymbol{B} = -\mu_0 \boldsymbol{J}, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{4}$$

と書ける（SI 単位系を採用した）．ただし，μ_0 は真空透磁率，ϵ_0 は真空誘電率，$c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ は光速を表す．

空間にデカルト座標 x, y, z を置き，それぞれの座標軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ と表す．$z = 0$ におかれた境界で空間を分割し，$z < 0$ の領域を領域 I，$z > 0$ の領域を領域 II と呼ぶ．領域 I は真空，領域 II は導体が占めるとする．$\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{B}$ は全空間で連続な関数と考えてよい．導体中の電流密度は以下の方程式で与えられるとする．

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J} = \epsilon_0 \omega_p^2 \left[\boldsymbol{E} - \lambda^2 \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E})\right]. \tag{5}$$

ただし ω_p および λ は正の定数である．

（問 1）式 (1), (3), (5) を一つの式に整理し，領域 II において電場 $\boldsymbol{E}$ が満たす式を導け．

（問 2）まず簡単な例として，領域 I に静電場

$$\boldsymbol{E}_s = E_0\, \boldsymbol{e}_z$$

が与えられたとする．ただし E_0 は実定数である．$\boldsymbol{E}_s$ と接続する領域 II 内の電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ．また領域 II 内の電荷密度 ρ を求めよ．

（問 3）次の例として，領域 I に電磁場

$$\boldsymbol{E}_w = \left[a_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} + a_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-kz-\omega t)}\right]\boldsymbol{e}_x\,,$$

$$\boldsymbol{B}_w = \frac{1}{c}\left[a_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} - a_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-kz-\omega t)}\right]\boldsymbol{e}_y$$

が与えられたとする．ω は角周波数を表す正の定数，$k = \omega/c$ は波数，a_1 は複素定数，a_2 は未知の複素定数である．係数 a_1 が掛かった項は，z が正の方向へ伝播する電磁波を表す．これを入射波と考える．係数 a_2 が掛かった項は，界面 $z = 0$ で反射されて反対方向へ伝播する反射波を表す．$\boldsymbol{E}_w$ および $\boldsymbol{B}_w$ と接続する領域 II 内の電磁場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ を求めよ．同時に反射波の複素振幅 a_2 を決定せよ．

第７問（物理学）

以下の１モルの気体に関する問題について解答せよ．ただし，気体定数を R，定圧モル比熱を C_P，定積モル比熱を C_V，比熱比は $\gamma \equiv C_P / C_V$ とする．また，気体の圧力を P，体積を V，温度を T，エントロピーを S とする．

（問１）　$\left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ が成り立つことを示せ．

（問２）　$C_P - C_V = T\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ 　が成り立つことを示せ．

（問３）理想気体について $C_P - C_V = R$ が成り立つことを示せ．

以下では C_P，C_V は定数として解答せよ．

（問４）理想気体の断熱過程において PV^{γ} が一定となることを示せ．

（問５）温度 T_{A} において体積 V_1 を占める１モルの理想気体について，次の準静的サイクル操作（A→B→C→D→A）を行うことを考える．

(A→B) 断熱膨張：$T_{\mathrm{A}} \to T_{\mathrm{B}}$　$V_1 \to V_2$　$(V_2 > V_1)$.

(B→C) 定積過程：$T_{\mathrm{B}} \to T_{\mathrm{C}}$　$(T_{\mathrm{B}} > T_{\mathrm{C}})$.

(C→D) 断熱圧縮：$T_{\mathrm{C}} \to T_{\mathrm{D}}$　$V_2 \to V_1$　.

(D→A) 定積過程：$T_{\mathrm{D}} \to T_{\mathrm{A}}$　.

（１）　横軸 V，縦軸 P　のグラフ上で，このサイクルを図示せよ．

（２）　各過程で気体が吸収した熱量と外部に行う仕事を求めよ．

（３）　熱効率 η は（気体が外部に行う仕事）/（気体が熱源から吸収した熱量）で定義される．このサイクルの熱効率が $\eta = 1 - (V_1 / V_2)^{\gamma - 1}$ で与えられることを示せ．

（４）　エネルギー等分配則が成り立つと仮定して，常温領域における単原子分子気体と二原子分子気体の γ をそれぞれ求めよ．

（５）　（４）で求められた γ を用いて，$V_2 = 2V_1$ のときに，単原子分子気体と二原子分子気体の η をそれぞれ有効数字２桁で求めよ．必要ならば以下の値を用いよ．

$2^{1/2} = 1.414$　　$2^{1/3} = 1.260$　　$2^{1/4} = 1.189$　　$2^{1/5} = 1.149$

$2^{1/6} = 1.122$　　$2^{1/7} = 1.104$　　$2^{1/8} = 1.091$　　$2^{1/9} = 1.080$

（６）　（５）で求められた二つの η の値の大小関係の理由について，１００字程度で定性的に説明せよ．

第８問（物理学）

球対称ポテンシャル $V(r)$ に束縛された質量 m，エネルギー $E\,(>0)$ の粒子を考える．時間に依存しないシュレディンガー方程式は極座標 (r, θ, ϕ) を用いると

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\boldsymbol{L}^2}{2mr^2}+E-V(r)\right]\psi=0 \tag{1}$$

となる．ただし，ψ は波動関数，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである．また，

$\boldsymbol{L}^2$ は演算子 $\boldsymbol{L}^2\equiv-\hbar^2\left\{\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\}$ である．

球面調和関数 $Y_l^m(\theta,\phi)$ は $\boldsymbol{L}^2$ の固有関数であり，$\boldsymbol{L}^2Y_l^m(\theta,\phi)=l(l+1)\hbar^2Y_l^m(\theta,\phi)$ を満たす．ただし，l は非負の整数であり，m は $-l\le m\le l$ を満たす整数である．

（問１）関数 $e^{i\phi}\sin\theta$ が $\boldsymbol{L}^2$ の固有関数となることを示し，固有値を求めよ．

（問２）球面調和関数 $Y_l^m(\theta,\phi)$ を用いて波動関数 ψ が $\psi(r,\theta,\phi)=R(r)Y_l^m(\theta,\phi)$ と変数分離できるとき，(1)式を変形して $R(r)$ のみに関する 微分方程式を導け．

以下では，ポテンシャル $V(r)$ は，ある正の定数 a を用いて $V(r)=\begin{cases}0 & (r<a)\\ +\infty & (r\ge a)\end{cases}$ で表されるとする．

（問３）l が 0 であるときの $R(r)$ の微分方程式を記せ．

（問４）（問３）で求めた微分方程式を $X(r)\equiv rR(r)$ の微分方程式に変形せよ．さらに，原点で発散しない解 $R(r)$ を求めよ．ただし，$R(r)$ は任意係数を含んでよい．

（問５）（問４）で求めた解の固有エネルギーを求めよ．なお，固有状態を指定する量子数を適切に定義して用いよ．

（問６）$m=1.6\times10^{-27}$ [kg], $a=1.0\times10^{-14}$ [m]であるとき，（問５）の固有エネルギーの最小値を有効数字１桁で求めよ．ただし，$\hbar=1.0\times10^{-34}$ [J s]とし，エネルギーは[eV]単位（1 [eV]$=1.6\times10^{-19}$ [J]）で記せ．

（草稿用紙）

（草稿用紙）

（草稿用紙）

（草稿用紙）