東京大学大学院
新領域創成科学研究科
複雑理工学専攻

受 験 番 号					

問題冊子にも受験番号を書きなさい.

平成 28 年度大学院入学試験問題

修士課程

専門基礎科目

平成 27 年 8 月 25 日（火）

13:30～16:00（150 分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけません.
2. 本冊子の総ページ数は 19 ページです．落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
3. 解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい.
4. 問題は，必修問題 1 問，選択問題として数学 3 問，物理学 4 問，合計 8 問出題されます．必修問題 1 問（第 1 問）と，選択問題（第 2～8 問）から 2 問を選択して，合計 3 問を解答しなさい．解答する選択問題 2 問は，1 科目の中から選択しても，複数科目から選択してもよい.
5. 解答用紙は計 3 枚配られます． 各問題ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用しなさい．解答用紙に書ききれない場合は，裏面にわたってもよい.
6. 解答は日本語または英語で記入しなさい.
7. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入しなさい．問題冊子にも受験番号を記入しなさい.
8. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと.
9. 解答に関係ない記号，符号などを記入した答案は無効とする.
10. 解答用紙・問題冊子は持ち帰ってはいけません.

（草稿用紙）

(草稿用紙)

（草稿用紙）

第 1 問（必修問題）

以下の問に答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

（問 1）以下の関数の 4 次の導関数をそれぞれ求めよ．

(1) $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$

(2) $f(x) = \tan x$

（問 2）以下の関数を $x = 0$ のまわりで 4 次の項まで Taylor 展開せよ．ただし，q は実数である．

(1) $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$

(2) $f(x) = (1 + x)^q$

(3) $f(x) = \log_{\mathrm{e}}(1 + x)$

（問 3）以下の極限値を求めよ．（問 2）の結果を用いてもよい．

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x \cos x - 1}{\tan x}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\log_{\mathrm{e}}(1 + x^2)}{1 - \cos x}$

（問 4）以下の積分値を誤差 0.01 以内で求めよ．（問 2）の結果を用いてもよい．

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{(1 + x^3)^2} \mathrm{d}x$$

第2問（数学）

次の3次正方行列 A, B, C を考える．

$$A = \begin{pmatrix} x & 4-x^2 & 0 \\ 1 & x-1 & x+2 \\ 0 & x-2 & x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(問1) 行列 A の行列式 $\det A$ を求めよ．さらに，$\det A = 0$ をみたす x を全て求めよ．

(問2) (問1) で求めた全ての x に対して，A の階数 rank A を求めよ．

(問3) $\det A$, $\det(AB)$, $\det(BA)$ の x に関する次数を求めよ．

(問4) $\det(AC)$ および $\det(CA)$ を求めよ．

(問5) 行列 A の固有値を全て求めよ．

(問6) (問5) で求めた固有値のうち，重複度が1である固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

第３問（数学）

時刻 t に関する N 個の実関数 $x_j(t),\ j=0,1,\ldots,N-1$ についての微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_j(t)+ax_j(t)=\frac{b}{2}[x_{j-1}(t)+x_{j+1}(t)],\quad j=0,1,\ldots,N-1 \tag{1}$$

を考える．ただし N は正の偶数であり，a,b は実数である．時刻 $t=0$ における初期値 $x_j(0)$ について，

$$x_j(0)\neq 0,\quad \sum_{j=0}^{N-1}x_j(0)\neq 0,\quad \sum_{j=0}^{N-1}(-1)^j x_j(0)\neq 0 \tag{2}$$

とする．また j に関しては周期的境界条件を用い，$x_{-1}(t)=x_{N-1}(t)$, $x_N(t)=x_0(t)$ とする．以下の問に答えよ．

(問１) 式 (1) で $b=0$ としたとき，$x_j(t)$ を $x_j(0)$ を用いて示せ．

(問２) (問１) で求めた $x_j(t)$ に関して，$\lim_{t\to\infty}x_j(t)=0$ となる a の条件を求めよ．

これ以降，式 (1) の b は 0 と限らないとする．

(問３) N 個の実関数 $\{x_j(t)\}_{j=0}^{N-1}$ の平均値 $x(t)$ を以下のように定義する．

$$x(t)=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}x_j(t) \tag{3}$$

式 (1) と (3) を用いて，$x(t)$ が満たす微分方程式を求めよ．また，$\lim_{t\to\infty}x(t)=0$ となるために，a と b が満たす条件を求めよ．

(問４) $x_j(t)$ の離散フーリエ変換 $X_k(t)$ を以下の式で定義する．

$$X_k(t)=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\exp\left(2\pi\mathrm{i}\frac{kj}{N}\right)x_j(t),\ k=0,1,\ldots,N-1 \tag{4}$$

ここで i は虚数単位である．式 (1) と (4) を用いて，$X_k(t)$ が満たす微分方程式を求めよ．

(問５) 全ての j について，$\lim_{t\to\infty}x_j(t)=0$ となるために，a と b が満たす条件を求めよ．必要ならば，式 (5) を用いてもよい．

$$x_j(t)=\sum_{k=0}^{N-1}\exp\left(-2\pi\mathrm{i}\frac{kj}{N}\right)X_k(t),\ j=0,1,\ldots,N-1 \tag{5}$$

第４問（数学）

実数値を取る確率変数 X の確率密度関数 $p_X(x)$，実数値を取る確率変数 Y の条件付き確率密度関数 $p_{Y|X}(y|x)$，実数値を取る確率変数 Z の確率密度関数 $p_Z(z)$ がそれぞれ

$$p_X(x) = \begin{cases} cx^{-4} & (x \geq 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{1}$$

$$p_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} x^{-1} & (0 \leq y \leq x) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$p_Z(z) = \begin{cases} 1 & (0 \leq z \leq 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} .$$

で与えられるとき，以下の問に答えよ．

(問 1) 式 (1) の c の値を求めよ．

(問 2) X の期待値と分散を求めよ．

(問 3) $p_X(x)$ の累積分布関数を求めよ．

(問 4) Y の周辺確率密度関数 $p_Y(y)$ を求めよ．

(問 5) Y が与えられたもとでの X の条件付き確率密度関数 $p_{X|Y}(x|y)$ を求めよ．

(問 6) X と Z が独立なとき，$U = X + Z$ の確率密度関数 $p_U(u)$ を求めよ．

第５問（物理学）

固定点 O から鉛直に吊るされた長さ h の支柱の下端 P に，長さ a の真っ直ぐで均一かつ剛体の橋 PQ が取り付けられており，橋のもう一方の端 Q は，固定点 O とばねで連結されている．なお支柱は立方体のブロックにより固定点 O で回転が出来ないよう固定されており，下端 P では，橋とは摩擦なしで自由に回転できるよう連結されている．橋に何も乗っていない時，図１(a)のように橋は斜めに傾いており，ばねの長さは支柱の長さと同じになった．次に，端 P から距離 s の位置に人が乗った時，図１(b)のように橋は水平になった．橋の質量を m，人の質量を M，重力加速度を g とし，以下の問に答えよ．ただし，支柱とばねの質量は無視できるとし，人は橋上の質点と考えよ．

（問１）図１(a)および図１(b)の場合について，ばねの張力を計算せよ．
（問２）ばね定数 k を計算せよ．

ここで，橋の中央 G に人が乗った時（$s = a/2$）に，図１(b)のように橋が水平になったとする．この状態で，固定点 O のブロックおよびばねが同時に外れた．その後の橋の運動について以下の問に答えよ．なお人は橋の上で動かないとする．

（問３）図２に示したように，固定点 O を原点，水平を x 軸，垂直下方を y 軸とし，橋が傾き角 α，支柱が傾き角 β となった時，点 G の座標を (x, y)，支柱が橋を引く力を F_P として，点 G の x および y 方向の運動方程式，および点 G 周りの回転の方程式を立てよ．なお橋の重心周りの慣性モーメントは $I = \dfrac{m}{12}a^2$ である．

（問４）ブロックおよびばねが外れた直後の運動を考える．点 G の座標 (x, y) を，α および β を使って表し，以下の式が成り立つことを示せ．

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -h\frac{d^2\beta}{dt^2} \quad , \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{a}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

（問５）（問４）の条件下で，m, M, a, g を用いて $\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$ の値を求めよ．さらに橋の傾き角 α を時間の関数として求めよ．

（問６）図２で端 P を x および y 方向に動かない固定点と想定し，端 P を支点とする橋 PQ の回転運動のみを考え，回転の初期における橋の傾き角 α を時間の関数として求めよ．またその結果が，（問５）で求めた答えと一致することを確認し，その理由を述べよ．

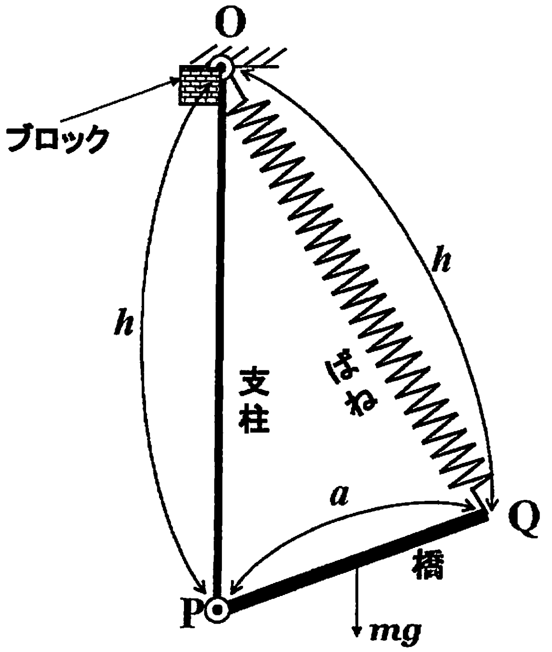

図１ (a)

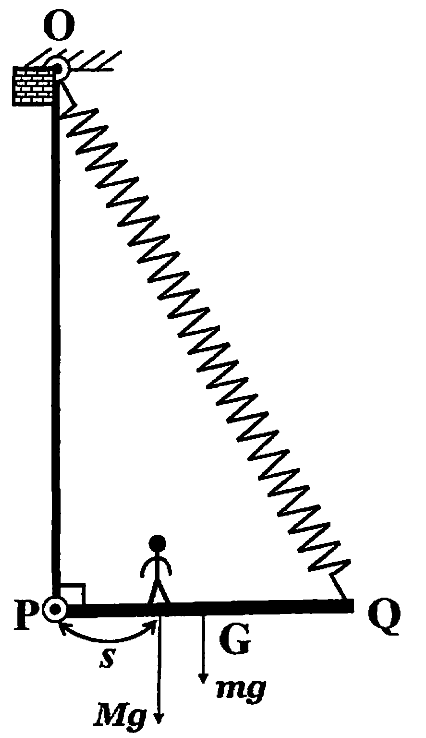

図１ (b)

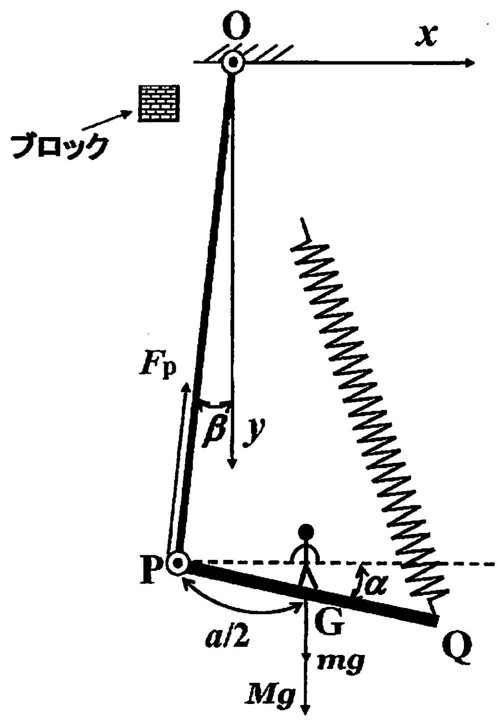

図２

第６問（物理学）

図１に示すように，領域が以下の２式で表される４つの導体がある．

$$x^2-y^2 \geq a^2 \quad (-\infty<z<+\infty)$$
$$x^2-y^2 \leq -a^2 \quad (-\infty<z<+\infty)$$

ここで x, y, z は三次元直交座標系を表す．導体以外の領域は真空であり，この領域を空間Sと記す．図１に示すように，一定の電位 $+V\,(>0)$ と $-V$ を導体に印加する．空間S内に時刻 $t=0$ に静かに置いた荷電粒子（電荷 $q>0$，質量 m）の運動について以下の問に答えよ．

（問１）空間S内の点 (x, y, z) における電位 $\phi(x, y, z)$ は以下の式で表せることを示せ．さらに，空間S内の点 (x, y, z) における電場 (E_x, E_y, E_z) を求めよ．

$$\phi(x,\ y,\ z)=\frac{V}{a^2}\,(x^2-y^2)$$

（問２）空間S内での荷電粒子の運動方程式を x, y, z 成分に分けて記せ．

（問３）（問２）の運動方程式において，空間S内に留まる周期運動を示す解が得られる荷電粒子の初期位置の範囲を答えよ．また，その時の周期を答えよ．

以下では，空間Sに一様な静磁場 $(0, B, 0)$ をさらに加えた場合を考える．

（問４）空間S内での荷電粒子の運動方程式を x, y, z 成分に分けて記せ．

（問５）（問３）で答えた範囲を満たす初期位置に対して，（問４）の運動方程式の解が空間S内に留まる周期運動となることを示し，その時の周期を答えよ．

（問６）（問３）で答えた範囲を満たす初期位置 (x_0, y_0, z_0) に荷電粒子を置いた．初期位置からの荷電粒子の相対位置の軌跡 $(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$ を xz 平面に投影し図示せよ．

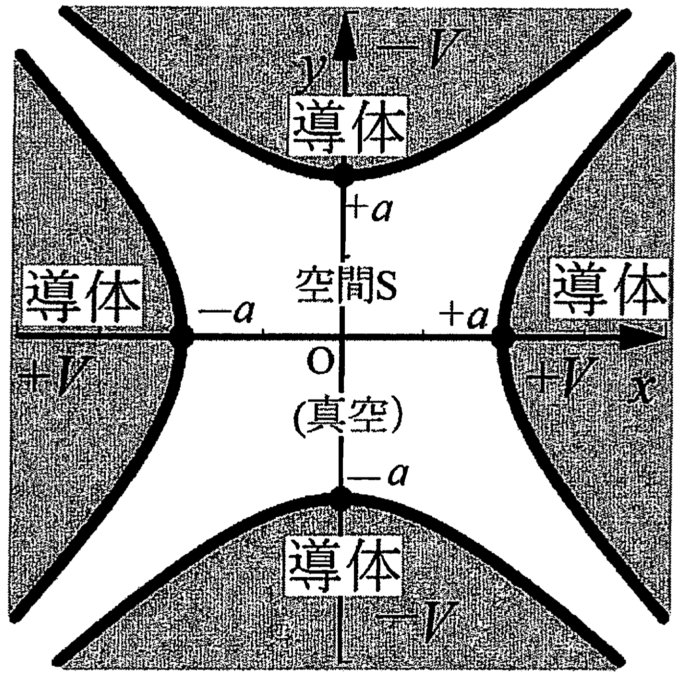

図1

第７問（物理学）

ある分子気体 n モルがファン・デル・ワールスの状態方程式 $p=\dfrac{nRT}{V-nb}-\dfrac{n^2a}{V^2}$ に従うとする．ただし，p, T, V は，それぞれ，この気体の圧力，絶対温度，体積であり，R は気体定数，a, b はこの気体特有の定数とする．この気体について以下の問に答えよ．ただし，N_A はアボガドロ数である．

（問１）熱力学の第一法則によればエントロピーS の全微分は，内部エネルギーU，絶対温度 T，圧力 p，体積 V を用いて，$dS=\dfrac{1}{T}dU+\dfrac{p}{T}dV$ と書ける．一方，S を T, V の関数と考えると，$dS=\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT+\left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$ となる．これらの関係と，$S(V,T)$の満たす関係式 $\dfrac{\partial}{\partial V}\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)=\dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)$ を用いて，次の式を導け．

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V-p \tag{1}$$

（問２）（問１）の(1)式とファン・デル・ワールスの状態方程式とを用いて $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ を n，a，V で表せ．

（問３）この気体の内部エネルギーU は $dU=\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT+\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$ を積分することで求めることができる．したがって，ある体積 V_0 での $U(T, V_0)$を基準にすれば，内部エネルギーU は $U(T,V)=U(T,V_0)+\displaystyle\int_{V_0}^{V}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$ となる．一方，V_0 が十分大きく，気体が希薄であれば，$U(T,V_0)$ は理想気体の内部エネルギーに等しいと考えてよく，$U(T,V_0)=nC_VT$ と書ける．ただし，C_V は理想気体の定積モル比熱である．$V_0 >> V$ として，$U(T,V)$ を T, V, C_V, n, a で表せ．

ファン・デル・ワールスの状態方程式中の a を含む項は，圧力 p に対する補正項と見なすことができ，この項は，気体の分子間力による内部エネルギーの低下を表すと期待できる．そこで，分子間力と内部エネルギーの関係を調べるために，次式で表されるポテンシャルエネルギー$u(r)$を導入する．

$$u(r)=\begin{cases}+\infty & (r<d)\\ -\varepsilon\left(\dfrac{d}{r}\right)^4 & (r\geq d)\end{cases}$$

$u(r)$ は１つの分子の周りのポテンシャルエネルギーであり，r はこの分子と他の分子の距離で，εと d はある正定数とする．また，気体は十分希薄であり，２体相互作用のみを考慮すればよいと仮定する．

（問４）$u(r)$ の概略図を描いて d の物理的な意味を簡単に説明せよ．

（問５）１つの分子から $r\geq d$ の領域に一様に他の分子が分布しているとすると，これらの粒子のポテンシャルエネルギーの和 u_1 は，平均粒子数密度 $\dfrac{nN_A}{V}$ を用いて，積分 $u_1=\int_d^{+\infty}u(r)\dfrac{nN_A}{V}4\pi r^2dr$ で表すことができる． u_1 を求めよ．

（問６）（問５）の u_1 はある分子の作るポテンシャルエネルギーであったが，すべての分子間のポテンシャルを考慮すると全ポテンシャルエネルギーは $nN_Au_1/2$ となる．これは分子間力による内部エネルギーの変化分を表す．この変化分と（問３）で求めた U の表式中の a に依存する項とが等しいとして，εを a, d, N_A で表せ．

（問７）ファン・デル・ワールスの状態方程式に現れる nb の物理的な意味を簡単に説明し，b を d, N_A で表せ．

（問８）二酸化炭素の場合，ファン・デル・ワールスの状態方程式中の定数 a, b は，それぞれ $a=0.37$ [J m^3 mol^{-2}]，$b=4.3\times10^{-5}$ [m^3 mol^{-1}] である．（問６），（問７）の結果を用いて εを a, b, N_A で表し，二酸化炭素のεに等価な絶対温度を有効数字一桁でケルビン単位 [K]で示せ．必要ならば気体定数 $R=8.3$ [J mol^{-1} K^{-1}]を用いてもよい．

第８問（物理学）

絶対温度０K において，１辺の長さが L の立方体の中に閉じ込められた電子について考える．電子の質量を m，プランク定数を h とし，$\hbar = h/(2\pi)$ を用いてもよい．以下では直交座標系(x,y,z)で考えることとする．

（問１）１個の電子がこの立方体に閉じ込められている場合に，立方体の中でこの電子の波動関数が満たすシュレディンガー方程式を記述せよ．

（問２）（問１）で求めたシュレディンガー方程式を解き，電子の波動関数およびエネルギー固有値に対する表式を求めよ．固有状態を指定する量子数を適切に定義して用いよ．

（問３）（問２）で求めた電子の各量子状態について，上向きスピンと下向きスピンの状態を取ることが可能である．また，N 個の電子がこの立方体の中に閉じ込められるときに，エネルギー（E により表す）の低い量子状態から順に占有されていくと仮定する．電子間の相互作用は無視し，N は十分大きい数であるとする．このとき，電子の持つ最大のエネルギー（フェルミ準位）E_{F} と N の関係式を求めよ．また，式 $N = \int_0^{E_{\mathrm{F}}} f(E)dE$ で定義される状態密度関数 $f(E)$ を求め，概形を図示せよ．

（問４）電子に一様な磁場 $\boldsymbol{H}$ を加えたとき，スピンの向きに応じて，電子のもつスピン磁気モーメント μ_{B}（正定数）は $\boldsymbol{H}$ と平行か反平行にそろい，それぞれ $-\mu_{\mathrm{B}}H$ および $\mu_{\mathrm{B}}H$ のエネルギー変化を示す．ここで $\boldsymbol{H}$ はベクトル，H はその絶対値を表す．（問３）で考えた系全体に一様な磁場 $\boldsymbol{H}$ を加えた状態を考える．ローレンツ力による効果は考慮しないものとする．このときのフェルミ準位を E_{B}，磁場に平行な磁気モーメントを有する電子の数を N_+，磁場に反平行な磁気モーメントを示す電子の数を N_- で表す．横軸を磁場に平行な磁気モーメント，磁場に反平行な磁気モーメントを有する電子の状態密度関数，縦軸をエネルギー E として，磁場 $\boldsymbol{H}$ が加えられている場合の状態を模式図で示せ．ただし，$E_{\mathrm{F}} >> \mu_{\mathrm{B}}H$ であり，$E_{\mathrm{B}} \approx E_{\mathrm{F}}$ が成り立つとする．

（問５）（問４）の N_+，N_- の表式を $m, L, E_{\mathrm{B}}, \mu_{\mathrm{B}}, H, h$ を用いて表せ．さらに，この系の全磁気モーメントの表式を $N, E_{\mathrm{F}}, \mu_{\mathrm{B}}, H$ を用いて表せ．ただし，$E_{\mathrm{F}} >> \mu_{\mathrm{B}}H$ が成り立つとして，H について近似展開し，二次以上の項を無視せよ．また，$E_{\mathrm{B}} \approx E_{\mathrm{F}}$ が成り立つとする．

（問６）絶対温度０K において，１辺の長さが L の正方形の中に閉じ込められた N 個の電子に一様な磁場 $\boldsymbol{H}$ を加えた場合について，上と同様に，全磁気モーメントの表式を $N, E_{\mathrm{F}}, \mu_{\mathrm{B}}, H$ を用いて表せ．

(草稿用紙)

（草稿用紙）

（草稿用紙）

（草稿用紙）