Slot 1: 1.1 微分積分（40 分）

以下の問に答えよ．すべての定数と変数は実数，関数は実関数とする．e は自然対数の底である．関数 $g(x)$ の一階微分と二階微分はそれぞれ $\dfrac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}=g'(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}^2g(x)}{\mathrm{d}x^2}=g''(x)$ と表される．

導出の過程を省略し，答えのみ示せ.

(問 1) 以下の関数 $f(x)$ に関する微分方程式の解を，与えられた初期条件の下で求めよ．

(1) $f''(x)-8f'(x)+16f(x)=0, f(0)=1, f'(0)=3$

(2) $f''(x)+4f'(x)+13f(x)=0, f(0)=1, f'(0)=0$

(3) $f''(x)+4f'(x)+13f(x)=40\sin x, f(0)=0, f'(0)=4$

(問 2) xyz 直交座標系において $z=x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ で定義される曲面 C について，以下の問に答えよ．

(1) 曲面 C 上の点 $\mathrm{A}(x_0,y_0,z_0)$ において z は最大値 z_0 をとる．x_0,y_0,z_0 の値を求めよ．

(2) 曲面 C 上の点 $\mathrm{B}(1,1,z_1)$ について，z_1 の値を求め，点 B における接平面の式を求めよ．

(問 3) xy 直交座標系において
領域 $R=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$ を定義する．以下の問に答えよ．

(1) $\iint_R x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ を求めよ．

(2) $\iint_R (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ を求めよ．

(問 4) エルミート多項式 $H_n(x)$ は $H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)$ で定義される．ここで，n は非負整数であり，$H_0(x)$=1 である．これらの多項式は微分方程式 $H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0$ を満たす．また，$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}2^nn!\delta_{m,n}$ の関係式が成り立つ．ここで m は非負整数，$\delta_{m,n}$ はクロネッカーデルタであり，$m=n$ で 1，それ以外で 0 である．$n!$ は n の階乗を表し，$0!=1$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $H_1(x)$ を x の多項式で表せ．

(2) $H_n(x)$ を x について微分し，$H_{n+1}(x)$ を $x, H_n(x), H_n'(x)$ を用いて表せ．

(3) $n\ge 1$ のとき，$H_n'(x)$ を $n, H_{n-1}(x)$ を用いて表せ．

(4) $n\ge 1$ のとき，$H_{n+1}(x)$ を $x, n, H_n(x), H_{n-1}(x)$ を用いて表せ．

(5) $n\ge 1$ のとき，$\int_{-\infty}^{\infty}xH_m(x)H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ を計算せよ．

Slot 2: 2.1 線形代数（40 分）

実列ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{a}}$ とする．ただし $\top$ は転置とする．I は単位行列を表す．

(問 1) $m \times n$ 実行列 A の列ベクトルは一次独立であるとする．$\boldsymbol{b}$ を m 次元の実列ベクトル，$\boldsymbol{x}$ を n 次元の実列ベクトルとする．以下の問に答えよ．導出の過程を省き，答えのみ示すこと．

(1) m と n の関係を不等式を用いて表せ．

(2) 与えられた $A, \boldsymbol{b}$ に対して，$\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2$ を最小化する $\boldsymbol{x}$ を $\hat{\boldsymbol{x}}$ とする．$\hat{\boldsymbol{x}}$ を $A, \boldsymbol{b}$ を用いて表せ．

(3) A は $Q^\top Q = I$ を満たす $m \times n$ 実行列 Q と $n \times n$ 上三角行列 R によって，$A = QR$ と分解できる．以下の A に対して，Q を 1 つ求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) $\|A\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\|^2$ は以下のように表せる．

$$\|A\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\|^2 = \left\| \boxed{\text{i}} \right\|^2 - \left\| \boxed{\text{ii}} \right\|^2$$

$\boxed{\text{i}}$ と $\boxed{\text{ii}}$ の空欄に入る式を Q と $\boldsymbol{b}$ を用いて表せ．

(問 2) xyz 直交座標系上の 3 点 $(2, 1, \sqrt{2})$, $(2, \sqrt{2}, 2)$, $(1, 0, 1)$ を考える．以下の問に答えよ．導出の過程を省き，答えのみ示すこと．

(1) 3 点を通る平面 P の方程式を x, y, z を用いて表せ．

(2) 平面 P 上の任意の点を $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)^\top$，原点周りの回転を表す行列を R とする．平面 P を $R\boldsymbol{p}$ により変換した平面 P' の方程式が $z = 1$ であるとき，R を求めよ．

(問 3) 以下の 2 つの行列 A, B を考える．

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ を 2 次元の実列ベクトルとする．以下の問に答えよ．(1), (2) については，導出の過程を省き，答えのみ示すこと．(3) については，答えに加えて導出の過程も示せ．

(1) $A^\top A$ を求めよ．

(2) $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ の制約のもとでの $\|A\boldsymbol{x}\|^2$ の最大値を求めよ．

(3) $\|A\boldsymbol{x}\| = 1$, $\|B\boldsymbol{y}\| = 1$ の制約のもとでの $(A\boldsymbol{x})^\top (B\boldsymbol{y})$ の最大値を求めよ．

Slot 2: 2.2　力学（40 分）

以下の問に答えよ．問 1 以外では重力加速度を $g\ (>0)$ とする．

(問 1) 初速度 8 m/s で鉛直上向きに投げ上げた質点が初期位置より 4 m 低いところを通過するのは何秒後か答えよ．重力加速度を 10 m/s^2 とする．

(問 2) 質量 m の質点が力 $\boldsymbol{f}$ を受けて運動している．加速度 $\boldsymbol{a}$ で並進運動する座標系における，この質点の運動方程式を書け．この座標系での質点の位置を $\boldsymbol{r}$，時刻を t とする．

(問 3) 質量 m_1 の質点 1 と質量 m_2 の質点 2 がばね定数 k の質量のないばねで結ばれ，摩擦のない水平面上に置かれている．

(1) 質点 1，2 を両側に引っ張って静かに手を離したあと，それぞれが従う運動方程式を書け．引っ張る前の位置からの質点 1，2 の変位を，質点 1 から質点 2 に向かう方向を正として，それぞれ x_1，x_2 とする．時刻を t とする．

(2) (1) における振動の角周波数を答えよ．

(問 4) 水平な台の上に質点が置かれており，この台が初期位置を振動の中心として角周波数 ω，変位振幅 A で鉛直方向に単振動を始める．振動開始時に台と質点は同じ上向き速度を持つとする．

(1) 質点が台から離れない条件を答えよ．

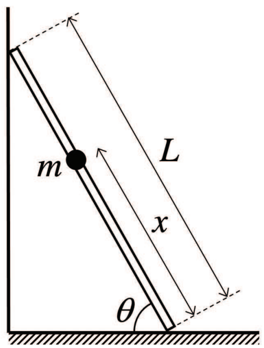
(2) 質点が台から離れる場合に，質点が離れるときの台の振動中心からの距離を答えよ．

(問 5) 長さ L の質量のない糸の先端に質量 m の質点を付けた単振り子を考える．鉛直下向きからの糸の傾き角を θ，最下点での速度を V とする．

(1) 糸の張力を L，m，V，θ，g を用いて表せ．

(2) $\theta = 180°$ でも糸がたるまない V の条件を求めよ．

(問 6) 下図のように，長さ L で質量のないまっすぐなはしごが，摩擦のない鉛直な壁と粗い水平な床との間に，水平方向となす角 θ で立てかけてある．はしごと床の間の静止摩擦係数は μ である．質量 m の質点がはしごの下端から x の距離にあるとき，はしごが滑り落ちない x の範囲を求めよ．



Slot 3: 3.1 解析学（40 分）

n, m を非負整数，a を正の実数，t, τ を実数とする．実関数 $f(t)$ について，以下のようにラプラス変換を定義する．

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

ここで，e は自然対数の底である．s は複素数であり，上記の積分が収束するような条件を満たすとする．また，単位ステップ関数 $u(t)$ を以下で定義する．

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

以下の問に答えよ．

(問 1) 以下の関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ と，$F(s)$ が存在するための s の条件を求めよ．導出の過程を省略し，答えのみ示せ．

(1) $f(t) = u(t-a)$

(2) $f(t) = \mathrm{e}^{at} \cdot u(t)$

(3) $f(t) = \sin t \cdot u(t)$

(4) $f(t) = t^n \cdot u(t)$

(問 2) $t \geq 0$ で定義される実関数 $g(t)$ のラプラス変換 $G(s)$ が以下のとき，$g(t)$ を求め，その概形を図示せよ．導出の過程を省略し，答えのみ示せ．

$$G(s) = \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}\right)^2$$

(問 3) 以下の問に答えよ．導出の過程を省略し，答えのみ示せ．

(1) 実関数 $f(t)$ とその微分 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$ が $t \geq 0$ で定義されているとき，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$ のラプラス変換を $s, F(s), f(0)$ を用いて表せ．ただし，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st} = 0$ とする．

(2) $t \geq 0$ で定義される実関数 $f(t)$ が以下の方程式と初期条件を満たす．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) - \int_0^t f(t-\tau)\cos\tau\,\mathrm{d}\tau = -\sin t - \mathrm{e}^{-t}, \quad f(0) = 2$$

(i) 方程式の両辺をラプラス変換し，$F(s)$ を求めよ．

(ii) $f(t)$ を求めよ．

(問 4) 以下の $f(t)$ のラプラス変換を求めよ．答えに加えて導出の過程も示せ．

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 2ma \leq t < (2m+1)a \\ -1, & (2m+1)a \leq t < 2(m+1)a \end{cases}$$

$$(m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Slot 3: 3.2 確率・統計（40 分）

(問 1) 確率変数 X は 平均 0，分散 1 の正規分布に従うとする．また，$X = x$ が与えられたときの確率変数 Y の条件付き確率密度関数 $f_{Y|X}(y|x)$ を平均 ax，分散 σ^2 の正規分布とする．ただし，a は実数である．以下の問に答えよ．導出の過程を省き，答えのみ示すこと．

(1) X, Y の同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x,y)$ を求めよ．

(2) Y の確率密度関数 $f_Y(y)$ を求めよ．

(3) $Y = y$ が与えられたときの X の条件付き確率密度関数 $f_{X|Y}(x|y)$ を求めよ．

(問 2) n 個の確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立であり，平均 0，分散 1 の同一の正規分布に従うとする．d, u は実数，c, α は正の実数であるとする．以下の問に答えよ．(1), (2), (3), (5) については，導出の過程を省き，答えのみ示せ．(4) については，答えに加えて導出の過程も示せ．

(1) 確率変数 $Y = cX_1 + d$ の確率密度関数 $f_Y(y)$ を求めよ．

(2) 確率変数 $Z = (X_1)^2$ の確率密度関数 $f_Z(z)$ を求めよ．

(3) Z の期待値 $E[Z]$，分散 $V[Z]$，モーメント母関数 $M_Z(t) = E[\mathrm{e}^{tZ}]$ を求めよ．ここで t は実数であり，$t < \dfrac{1}{2}$ を満たす．必要に応じて公式 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ を用いてよい．ただし，$\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty u^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$ はガンマ関数であり，e は自然対数の底である．

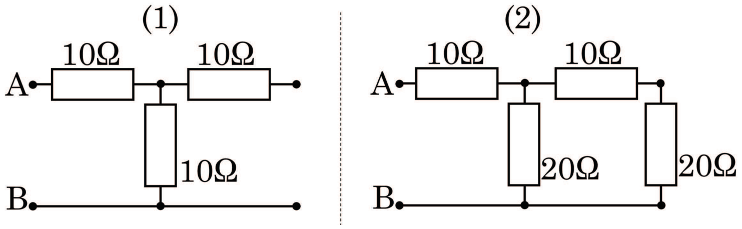
(4) 確率変数 $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2$ の確率密度関数 $f_S(s)$ を，$f_S(s)$ はガンマ分布 $g_{k,\beta}(s) = \dfrac{\beta^k}{\Gamma(k)}s^{k-1}\mathrm{e}^{-\beta s}$ $(s \geq 0)$ であると仮定し，正の定数 k, β を決定することにより求めよ．

(5) $W_1, W_2, \ldots, W_n$ は平均 μ，分散 σ^2 の正規分布からの無作為標本とする．平均 μ を既知として，標本 $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ から分散 σ^2 の 95%信頼区間を計算する方法を説明せよ．

Slot 3: 3.3 電磁気学 (40 分)

以下の問に答えよ.

(問 1) 以下の (1), (2) の回路において AB 間の合成抵抗を求めよ.



(問 2) 一様な電場 $\boldsymbol{E}$, 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の中を速度 $\boldsymbol{v}$ で動く質量 m, 電荷 q の荷電粒子について以下の問に答えよ.

(1) 荷電粒子にかかる力を求めよ.

(2) xyz 直交座標系において，電場と磁束密度がそれぞれ $(0, 0, E_z)$, $(0, 0, B_z)$ と書けるとき，荷電粒子の運動方程式を x, y, z 成分に分けて書け. ただし荷電粒子の速度は (v_x, v_y, v_z) とし，時刻を t とする.

(問 3)

(1) 太さを無視できる無限に長い直線状の導線に電流 I が流れているとき，導線から距離 r の位置における磁界 $\boldsymbol{H}$ の強さを求めよ. また電流と磁界の向きを図示せよ.

(2) 半径 a の円を断面に持つ無限に長い直線状の導線に一様な電流 I が流れているとき，導線の中心から距離 r の位置における磁界 $\boldsymbol{H}$ の強さを求めよ.

(問 4)

(1) ある閉回路を横切る磁束が，無限小の時間 $\mathrm{d}t$ の間に ϕ_1 から ϕ_2 に変化したときに，その回路に生じる誘導起電力の大きさを求めよ.

(2) 一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ のもとで，半径 a の導体円環と円環中心が抵抗値 R の抵抗を介して下図のように接続され，さらに導体棒が円環中心と円環に接している. 導体棒が円環中心を回転中心として角速度 ω で回転するとき，抵抗に流れる電流を求めよ. ただし，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と円環がある平面は直交するとする.